數學傳播 30卷2期, pp. 12-27

微積分五講——
第二講 微積分的三個組成部分

龔　昇・張德健

一. 一元微積分的三個組成部分

大致上來講, 微積分這門學科的內容是由 微分、積分、以及聯結微分與積分的微積分基本定理這三個部分所組成。微分的部分與積分的部分都易於理解, 而第三部分, 指出微分和積分是一組對立運算的微積分基本定理, 也許要多用些篇幅來說明, 我們先從一元微積分說起。

微分與積分的思想由來已久, 例如: 阿基米德 (Archimedes, 公元前287∼公元前212) 在將近兩千三百年前就已經知道如何求拋物線、弓形的面積、螺線的切線等, 劉徽於公元三世紀在他的割圓術中, 就是用無窮小分割來求面積的等等。經過長期的累積成果, 在牛頓 (Newton) 與萊布尼茲 (Leibniz) 之前, 已經有了大量微積分先驅性的工作, 爲微積分的誕生打下了穩固的基礎。比方說, 在牛頓與萊布尼茲之前, 人們已經知道如何求曲線 $y=x^n$ (其中n爲正整數) 的切線及它所覆蓋的曲邊梯形的面積等。(關於微積分產生前的歷史將在第四講中詳細討論); 但是所提到的這些還不能說明眞正微積分的建立, 直到牛頓與萊布尼茲證明了如下的微積分基本定理, 才眞正地標誌著微積分的誕生。因此, 這個基本定理也叫 Newton-Leibniz 公式。

微積分基本定理 (微分形式): 設函數 $f(t)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續, x 是區間 $[a,b]$ 中一個內點, 令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a<x<b)$$

則 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 並且

$$\Phi'(x)=f(x) \qquad (a<x<b)$$

即

$$d\Phi(x)=f(x)dx$$

換句話說, 如 $f(x)$ 的積分是 $\Phi(x)$, 則 $\Phi(x)$ 的微分就是 $f(x)dx$, 即 $f(x)$ 的積分的微分就是 $f(x)$ 自己乘上 dx, 也就是反映整體性質的積分:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

是由反映局部性質的微分 $d\Phi(x) = f(x)dx$ 所決定。

微積分基本定理 (積分形式): 設 $\Phi(x)$ 是在 $[a, b]$上可微, 且

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}$$

等於連續函數$f(x)$, 則下面等式成立

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a) \qquad (a \leq x \leq b).$$

換句話說, 如$\Phi(x)$的微分是 $f(x)dx$, 則 $f(x)$ 的積分就是 $\Phi(x)$, 也就是 $\Phi(x)$ 的微分的積分就是 $\Phi(x)$ 自己 (或相差一常數)。也就是, 作爲反映局部性質的微分 $f(x)dx$, 是由作爲反映整體性質的積分

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x f(t)dt$$

所決定。

這個定理之所以叫做微積分基本定理, 是因爲這個定理明確指出: 微分與積分是一組對立的運算, 也就是說微分與積分互爲逆運算, 這時, 也只有在這個時候, 才算建立了微積分這門學科。從此微積分成了一門獨立的學科, 而不再像以前那樣作爲幾何學的延伸, 而求微分與積分的問題, 尤其是求積分的問題, 不再是一個一個問題單獨地來處理, 而有了統一的處理方法; 當然, 牛頓與萊布尼茲所建立起來的微積分這門學科還有不完善之處, 還沒有十分牢固的理論基礎, 仍有一些解說不能令人滿意。這方面將在第四講中進一步闡述。

爲了進一步認識這個基本定理的重要性, 不妨回顧一下我們十分熟悉的一元微積分的微分與積分的定義:

在微積分一開始, 就有微分與積分的定義。若$f(x)$在$[a, b]$上連續, x_0 是 $[a, b]$ 中一內點, 若極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

對任意的 $\Delta x \to 0$ 都存在, 則稱此爲 $f(x)$ 在點 $x = x_0$ 處的導數, 記作

$$\frac{df}{dx}(x_0) \qquad \text{或} \qquad f'(x_0)$$

$f'(x_0)dx$ 稱爲函數f 在 $x=x_0$ 處的微分。由此可見導數與微分是函數的局部性質, 也就是只與函數在 $x=x_0$ 這一點附近的值有關。

在區間 $[a,b]$ 中取 $n-1$ 個點 $x_1,\ldots,x_{n-1}$, 且令 $a=x_0$, $b=x_n$, $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$, ξ_j 爲 $[x_{j-1},x_j]$ 中一點, 作和

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j,$$

若 $\rho=\max\{\Delta_j\}$, 令 $n\to\infty$, $\rho\to 0$, 如果 $\lim_{n\to\infty,\rho\to 0} S_n$ 存在, 且對各種取點都得到相同的值, 則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可積, 且記極限値爲

$$\int_a^b f(x)dx$$

而 S_n 稱爲「黎曼和」(Riemann sum)。

上述的微分與積分的定義是大家十分熟悉的, 現在來考慮最簡單的函數: $y=x^m$, 其中 m 爲正整數, 區域爲 $[0,1]$。現在按照上述定義來求導數與積分, 對 $y=x^m$ 求導數, 這就要用到二項式定理, 但是人們得到二項式定理已是很後的事了。至於對 $y=x^m$ 求積分, 先看 $m=2$ 的情形, 這時將 $[0,1]$ 進行 n 等分, 取 $\xi_j=x_{j-1}$, 則

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{n}\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big)^2+\Big(\frac{2}{n}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big]\\
&=\frac{1}{n^3}\Big[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\Big]\\
&=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(n-2)}{6}\\
&=\frac{1}{6}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(2-\frac{1}{n}\Big)\ \to\ \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

於是求積分的問題化爲求和: $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$ 的問題。同樣, 當 $m=3$ 時, 求 $y=x^3$ 的積分的問題化爲求和: $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3$, 當然這個和還是可以計算出來的。至於當 m 取一般的正整數時, 如果繼續用上述的取點辦法, 那麼對 $y=x^m$ 在 $[0,1]$ 上求積分的問題就化爲求和 $1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m$ 的問題了, 要求出這個和不是容易的事, 於是不妨想辦法來改變在 $[0,1]$ 中取點的辦法。我們現在來討論更一般的問題: 求 $y=x^m$, m 爲正整數, 在 $[a,b]$ 上的積分, 這裏 $0<a<b$。令 $OC=a$, $OD=b$, 在 C, D 取點 $M_1,\ldots,M_{n-1}$, 使得 $OM_1=aq$, $OM_2=aq^2,\ldots,OM_n=aq^n$, 這裏 $M_n=D$, 且令

$$C=M_0,\qquad q=\Big(\frac{b}{a}\Big)^{1/n}$$

這樣得到了 $[a,b]$ 之間的一個不等距的分割, 而 N_k 點爲 $y=x^m$ 上當 $x=OM_k$ 的點, N_kM_k 之長爲 $(aq^k)^m$, P_k 點爲由 N_{k-1} 點出發與 x 軸相平行於 N_kM_k 的點。

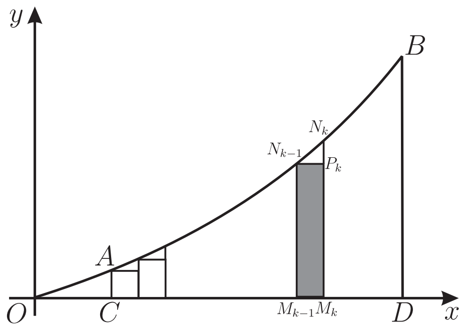

圖2.1

於是矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面積爲

$$(aq^k-aq^{k-1})(aq^{k-1})^m=(q-1)(aq^{k-1})^{m+1}$$

把這些矩形的面積加起來就得到由 $y=x^m$ 在 $[a,b]$ 上所得的曲邊梯形的近似值

$$\begin{aligned}S_n&=(q-1)(aq^{1-1})^{m+1}+(q-1)(aq^{2-1})^{m+1}+\cdots(q-1)(aq^{n-1})^{m+1}\\&=(q-1)a^{m+1}\big(1+q^{m+1}+q^{2(m+1)}+\cdots+q^{(m+1)(n-1)}\big)\\&=(q-1)a^{m+1}\frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1}\end{aligned}$$

而 $q^n=\frac{b}{a}$, 所以

$$S_n=a^{m+1}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{\frac{q^{m+1}-1}{q-1}}$$

但是這樣的不等距的分點法, 當分點越來越多, 即區間 $[a,b]$ 越分越細時, 每一小段的長都趨於零。因此, 當 $n\to\infty$, q 顯然趨於 1,

$$\frac{q^{m+1}-1}{q-1}\ \to\ m+1$$

於是

$$S_n\ \to\ \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

因此

$$\int_a^b x^m dx=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

當m爲正整數, $0 < a < b$ 時成立。

由上述的例子可以看出, 如果按照原有的定義來求微分與積分, 尤其是求積分, 即使像 $y = x^m$, m 爲正整數, 這樣簡單的函數, 一般來說, 都是不容易的。在上述例子中, 爲了要求 $y = x^m$ 的積分, 要取不等距的分點, 然後來求和的極限, 想到這點就很不容易, 而對於別的函數, 就要想出針對這個函數的辦法來求積分, 即使將和的極限求出來, 也無法證明如果用別的取點法得到的和的極限是否一樣? 這就是在 Newton 與 Leibniz 建立微積分基本定理前的情形。有了微積分基本定理後, 就不要這樣做了, 由於微分、積分互爲逆運算, 以至求函數 $f(x)$ 的積分, 只要求微分的逆運算就可以了, 即只要求 $\Phi(x)$, 使得 $\Phi'(x) = f(x)$, 那麼, $\Phi(x)$ 就是 $f(x)$ 的積分了。如上例中 $y = x^m$, 只要求 $\Phi(x)$, 使得 $\Phi'(x) = x^m$ 即可, 這是易於得到的。有了這基本定理就不必要對一個個的函數在區間上取分點, 然後想各種辦法來求和的極限了, 這種做法都可以拋到一邊, 更不必擔心取不同的分點方法, 相應的和的極限是否相同。這就是微積分基本定理的歷史與現實的意義。

二. 多元微積分的三個組成部分

上一節探討了一元微積分的三個組成部分, 尤其是反映微分與積分是微積分中一組對立運算的微積分基本定理。在這一節中, 我們將要探討高維空間的情形。在高維空間上討論微積分, 或多元微積分, 比起一元微積分來, 情況當然要略爲複雜一些。但微分與積分這組對立運算依然是多元微積分的主要架構, 而其內容依然有三個組成部分, 即: 微分、積分、指出微分與積分是一組對立運算的微積分基本定理。微分與積分這兩部分易於理解, 在高維空間的情形, 只是將一元微積分中的導數及微分推廣成偏導數、方向導數與全微分, 將積分推廣成重積分、線積分、面積分等, 這些推廣是十分自然的。那麼, 什麼是高維空間中的微積分基本定理? 要回答並說清楚這個問題, 還眞得費些口舌。

在大學學習的多元微積分, 主要是指在三維歐氏空間中討論的微積分, 而在這空間中揭示微分與積分是一組對立運算, 主要是由下面這三個定理 (或稱公式) 來體現的。

格林 (George Green, 1793∼1841) 定理 (或稱格林公式): 設 D 是 xy 平面上封閉曲線 L 圍成的區域, 且函數 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有一階連續偏導數, 則

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy$$

這裏 $\oint_L$ 表示沿 L 逆時針方向的線積分 (見圖2.2)。

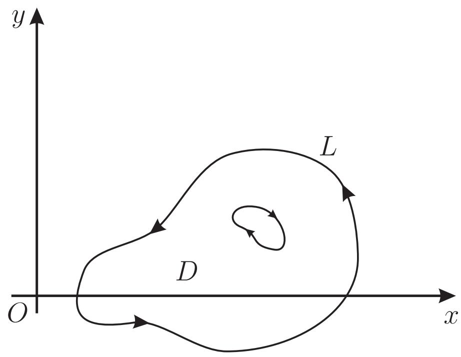

圖2.2.

斯托克斯 (George Gabril Stokes, 1819～1903) 定理 (或稱斯托克斯公式): 設空間曲面 Ω 的邊界是封閉曲線 L, 若 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 上有一階連續偏導數, 則

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy$$

這裏 $\int_L$ 表示沿圖 2.3 中的方向的線積分。

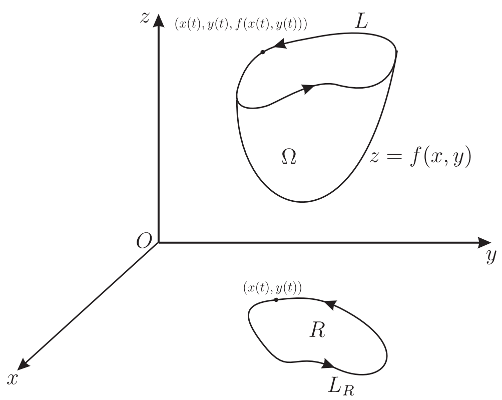

圖2.3

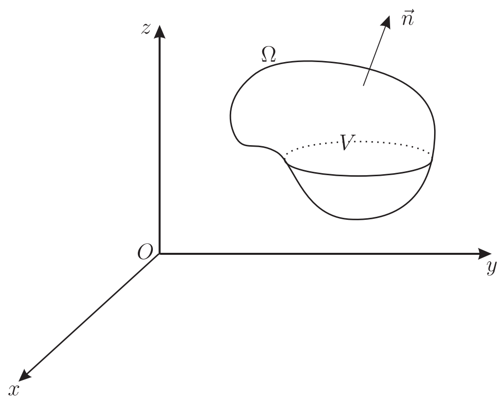

圖2.4

高斯 (Carl Friendrich Gauss, 1777～1855) 定理 (或稱高斯公式或稱奧斯特羅格拉茨基 (Michel Ostrogradsky, 1801～1862) 公式): 假設 V 是空間封閉曲面 Ω 所圍成的閉區間。函數 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 在 V 上有一階連續偏導數, 則

$$\int_{\Omega_{ext}} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{V}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dv$$

這裏 Ω_{ext} 表示曲面 Ω 的定向爲法線向外, dv 爲 V 的體積元素 (見圖2.4)。

這三個定理 (或稱公式) 是任何多元微積分的書中必講的。這三個定理都是說函數在區域邊界上的積分與在區域內部積分的關係。爲什麼說這三個定理是三維歐氏空間中微積分的基本定理呢? 在三維歐氏空間中, 除了這三個刻畫函數在區域邊界上的積分與區域內部積分的關係的定理外, 還有沒有其他這樣的定理? 這三個定理與一元微積分中的微積分基本定理到底有什麼關係? 要回答並說淸楚這些問題, 必須要用到外微分形式 (exterior differential forms)。

要嚴格地定義什麼是外微分形式, 得用很多篇幅, 而這個方面的書籍已經很多, 例如作爲經典作之一的有德・拉姆 (Georges William de Rham) 寫的書[1]等, 在這裡只作一個通俗而不嚴格的簡要介紹。要講外微分形式, 必須先講定向的概念, 曾獲 1958 年 Fields Medal 的著名法國拓樸學家 R. Thom (1923∼) 教授, 曾經表達過這樣的意見: *定向概念是幾何拓樸中意義最深刻的偉大創造之一*[2]。

我們討論線積分、面積分時, 它們的積分區域都是有方向的, 把一重積分, 二重積分看作線積分、面積分的特殊情形, 則它們的積分區域是有方向的, 同樣對三重積分也可以定向。例如: 一條曲線 L 的端點分別爲 A 與 B, 那麼對它有兩種定向的辦法, 或是由 A 到 B, 或是由 B 到 A。有了定向之後, 從 A 到 B 的線積分與從 B 到 A 的線積分, 這兩者就相差一符號, 也就是曲線的長度可以有正有負, 這類事在單變量積分時也早已有了:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

關於曲面, 如何來定向, 假設說討論的曲面可以分爲內外兩側, 也就是法線向外或向內兩種定向的方法, 而這樣的曲面稱爲可定向的。值得注意的是, 的確存在只有一側的曲面, 即法線從一點出發後回到原來的位置時, 法線的方向指向另一面了。例如, 把一矩形條$ABCD$的一對對邊擰轉粘上 (見圖2.5) , 這樣的曲面就無法分出內外側了, 這樣的曲面稱爲不可定向的, 這便是有名的 Möbius bend。我們不討論這樣的曲面, 而只討論可定向的曲面。在曲面定向後, 不同方向的積分値差一符號, 也就是曲面的面積在定向後有正有負, 對三維空間中的區域, 也可給予定向。多重積分的體積元素應有正負定向是大數學家 Poincaré 於十九世紀末指出的, 這樣一來使得多元微積分產生了根本性的改變。

圖2.5. Möbius bend

再回憶二重積分的下述定義: 如 $f(x,y)$ 在區域 D 中有定義, 則

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \lim \sum f(\xi_j,\eta_j)\Delta A_j,$$

這裡將區域D用平行於x軸與y軸的平行線分割成很多的小的區域, 將這些小區域記作 ΔA_j, (ξ_j,η_j) 爲其中的一點, ΔA_j 的面積仍記爲 ΔA_j, lim 取爲使得所有的 ΔA_j 收縮爲一點。如果上式右邊的極限對任意分割方法都存在且相等, 這個極限值就以上式左邊的二重積分表示(見圖2.6)。

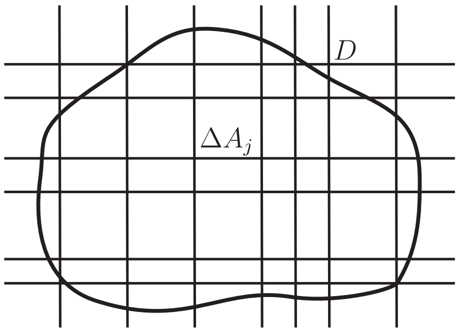

圖2.6

如果對 D 沒有定向, 那麼總假定 ΔA_j 都是正的。因此, 如果進行變數變換

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

則

$$dA = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

於是

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(u(x,y),v(x,y)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

即爲了保持面積元素還是正的, 我們必須對 Jacobi 行列式 (Jacobian) 取絕對值, 這裡 D' 是由 D 經過變換 (1) 的逆變換得到的區域。但是, 如果 D 是已經定向了的曲面, 由於面積本來可正可負, 所以就沒有必要對 Jacobi 行列式取絕對值了, 即此時

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(u(x,y),v(x,y)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$$

這裡 D' 當然也是已定向的曲面了, 於是

$$dxdy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}dudv$$

從這裡可以得到

(i) 如果取 $y=x$, 則

$$dxdx=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}dudv=0$$

(ii) 如果將 x 與 y 對換, 則

$$dydx=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}dudv=-dxdy$$

所以此時 $dydx\neq dxdy$, 也就是說, dx 與 dy 在乘積的次序不能顚倒, 如要顚倒, 就要相差一個符號。滿足上述兩條規則的微分乘積稱爲微分的外乘積 (exterior product), 爲了表示與普通乘積不一樣, 用記號 $dx\wedge dy$ 來記它, 即:

- $dx\wedge dx=0$ (兩個相同微分的外乘積爲零)
- $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ (兩個不同微分的外乘積交換次序後相差一個符號)。

當然 $dx\wedge dx=0$ 是 $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ 的推論。從這裡可以看出: 當積分區域定向之後, 引入微分的外乘積是順理成章的事。由微分的外乘積乘上函數組成的微分形式, 稱爲外微分形式, 若 P, Q, R, A, B, C, H, 都是 x, y, z 的函數, 則 $Pdx+Qdy+Rdz$ 爲一次外微分形式 (由於一次沒有外乘積, 所以與普通的微分形式是一樣的);

$$Adx\wedge dy+Bdy\wedge dz+Cdz\wedge dxdy$$

爲二次外微分形式; 而 $Hdx\wedge dy\wedge dz$ 則爲三次外微分形式; 把 P, Q, R, A, B, C, H, 等稱爲外微分形式的係數, 而稱函數 f 爲 0 次外微分形式。

對任意兩個外微分形式 λ 與 μ, 也可以定義外乘積 $\lambda\wedge\mu$, 只要相應的各項外微分進行外乘積就可以了。例如 A, B, C, D, E, F, G, P, Q 與 R 都是 x,y,z 的函數, 且

$$\begin{aligned}\lambda&=Adx+Bdy+Cdz\\ \mu&=Edx+Fdy+Gdz\\ \nu&=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\mu=&(Adx+Bdy+Cdz)\wedge(Edx+Fdy+Gdz)\\=&AEdx\wedge dx+BEdy\wedge dx+CEdz\wedge dx\\&+AFdx\wedge dy+BFdy\wedge dy+CFdz\wedge dy\\&+AGdx\wedge dz+BGdy\wedge dz+CGdz\wedge dz.\end{aligned}$$

由微分的外乘積定義, 我們得到

$$\begin{aligned}&dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0\\&dy\wedge dx=-dx\wedge dy\\&dz\wedge dy=-dy\wedge dz\\&dx\wedge dz=-dz\wedge dx\end{aligned}$$

所以

$$\lambda\wedge\mu=(BG-CF)dy\wedge dz+(CE-AG)dz\wedge dx+(AF-BE)dx\wedge dy$$

同樣可得

$$\lambda\wedge\nu=(AP+BQ+CR)dx\wedge dy\wedge dz.$$

有了外微分形式的外乘積, 立刻可得: 外微分的外乘積滿足分配律和結合律, 即如果 λ, μ, ν 是任意三個外積分形式, 則

(i) $(\lambda+\mu)\wedge\nu=\lambda\wedge\nu+\mu\wedge\nu$, $\lambda\wedge(\mu+\nu)=\lambda\wedge\mu+\lambda\wedge\nu$;

(ii) $\lambda\wedge(\mu\wedge\nu)=(\lambda\wedge\mu)\wedge\nu$. 當然, 外微分形式的外乘積不滿足交換律, 而滿足

(iii) 若 λ 爲 p 次外微分形式, μ 爲 q 次外微分形式, 則

$$\mu\wedge\lambda=(-1)^{pq}\lambda\wedge\mu.$$

這種按照 $dx\wedge dx=0$; $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ 的規律進行的外乘積, 實際上以前我們已遇到過。例如: 兩個向量$\vec{u}$, $\vec{v}$的外積 (向量積) 就是服從這個規律的, 即 $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$, 所以對微分進行外乘積就好像對向量進行向量積。對外微分形式 ω, 可以定義外微分算子如下:

- 對於零次外微分形式, 即函數$f(x)$, 定義

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

  即是普通的全微分算子。

- 對於一次外微分形式 $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$, 定義

$$d\omega=dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz$$

即對 P, Q, R 進行外微分, 然後進行外乘積, 由於

$$\begin{aligned}dP&=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\\ dQ&=\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\\ dR&=\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\end{aligned}$$

所以經過整理之後, 我們得到

$$d\omega=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy\wedge dz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dz\wedge dx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy$$

- 對於二次外微分形式$\omega=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy$也是一樣, 定義

$$d\omega=dA\wedge dy\wedge dz+dB\wedge dz\wedge dx+dC\wedge dx\wedge dy$$

將 dA, dB, dC 的式子代入上式, 利用外乘積的性質, 立即得到

$$d\omega=\Big(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\Big)dx\wedge dy\wedge dz$$

- 同樣對於三次外微分形式 $\omega=Hdx\wedge dy\wedge dz$ 也是一樣, 定義 $d\omega=dH\,dx\wedge dy\wedge dz$, 顯而易見的, $d\omega=0$。這是因爲 dH 與 $dx\wedge dy\wedge dz$ 作外乘積, 每一項中至少有兩個微分是相同的, 於是在三維空間中, 任意三次外微分形式的外微分均爲零! 關於外微分算子, 立即可得到下面重要的定理。

Poincaré 引理: *若 ω 爲一外微分形式, 其微分形式的係數具有二階連續偏導數, 則* $dd\omega=0$。

還可以有:

Poincaré 引理之逆定理: *若 ω 是一個 p 次外微分形式, 且 $d\omega=0$, 則存在一個 $p-1$ 次外微分形式 α, 使得 $\omega=d\alpha$。*

有了這些準備以後, 就可以說清楚在高維空間中微分與積分如何成爲一組對立的運算了。我們先看 Green 公式:

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy$$

如果記 $\omega_1 = Pdx + Qdy$, 則 ω_1 是一次外微分形式, 於是

$$d\omega_1 = \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

由於線積分的曲線是定向的, 所以 Green 公式可以寫成

$$\oint \omega_1 = \iint d\omega_1$$

再看 Stokes 公式:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy$$

由於線積分的曲線L與面積分的區域 Ω 都是定向的, 把 $Pdx + Qdy + Rdz = \omega_2$ 看成是一次外微分形式, 於是

$$d\omega_2 = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big) dz \wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

因此 Stokes 公式可以寫成

$$\int \omega_2 = \iint d\omega_2$$

同樣, Gauss 公式爲:

$$\int_{\Omega_{ext}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{V} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dxdydz$$

由於 Ω 與 V 都是定向的, 所以可將 $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \omega_3$ 看成是二次外微分形式, 從而

$$d\omega_3 = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dx \wedge dy \wedge dz$$

於是 Gauas 公式可以寫成

$$\iint \omega_3 = \iiint d\omega_3$$

從這些立即看出: 在三維歐氏空間中, Green 公式、Stokes 公式與 Gauss公式實際上都可以用同一公式表出來, 這個定理 (或公式) 也叫做斯托克斯 (Stokes) 定理 (或 Stokes 公式)

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega. \tag{2}$$

這裡, ω爲外微分形式, $d\omega$爲ω的外微分, Ω爲$d\omega$的積分區域, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的邊界, Ω 的維數與 $d\omega$ 的次數一致, $\int$ 表示區域有多少維數, 也就是多少重數。從這裡還可以看出: 除了 Green 公

式、Stokes 公式以及 Gauss公式以外, 在三維歐氏空間中, 不會再有其他聯繫區域與其邊界的積分公式, 因爲這時三次外微分形式的外微分爲零。

不僅如此, 回到一元微積分的情況, 這時取 ω 爲 0 次外微分形式, 即 ω 爲函數 $f(x)$, 取 Ω 爲直線段 $[a,b]$, $\partial\Omega$ 爲 Ω 的邊界, 這裏就是端點 a 與 b, 而 $d\omega$ 就是 $\frac{df}{dx}(x)$, 於是 Stokes 公式就成爲:

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a),$$

這就是一元微積分的基本定理。因此, Stokes 公式的確是一元微積分的基本定理在高維空間之推廣。

歸納起來, 在公式 (2) 中, 當 ω 爲零次外微分形式, Ω 爲直線段時, 此即 Newton-Leibniz 公式; 當 ω 爲一次外微分形式, 而 Ω 爲平面區域時, 此即 Green 公式; 當 ω 爲一次外微分形式, 而 Ω 爲三維空間中的曲面時, 此即 Stokes 公式; 當 ω 爲二次外微分形式, 而 Ω 爲三維空間中的一個區域時, 此即 Gauss 公式, 它們之間的關係可列表如下:

外微分形式的次數	空間	公式
0	直線段	Newton-Leibniz 公式
1	平面區域	Green 公式
1	空間曲面	Stokes 公式
2	空間中區域	Gauss 公式

公式 (2) 揭露了在三維歐氏空間中微分與積分是如何成爲一組對立的, 這組對立的一方爲外微分形式, 另一方爲線積分、面積分、體積分。這個公式說: 外微分形式$d\omega$在區域上的積分等於比它低一次的外微分形式 ω 在區域的低一維的邊界上的積分, 外微分運算與積分起了相互抵消的作用, 就像加法與減法、乘法與除法、乘方與開方相互抵消一樣。

公式 (2) 形式上統一了上述四條定理, 那麼這種形式上的統一是否出於湊巧? 當然不是。正是引入了十分自然的定向的概念, Poincaré 指出了體積元素應有正負定向的概念, 公式 (2) 的得到是順理成章的事, 是必然的結果。更爲重要的是: 在高維歐氏空間, 當維數大於3時, Stokes 公式 (2) 依然成立; 不但如此, 當 Ω 是微分流形時 (將在第五講中討論) , (2) 依然成立, 這說明 Stokes 公式 (2) 是微積分中具有本質性的定理, 這不僅說清楚了三維歐氏空間中, 爲何微分與積分是一組對立運算, 它們是如何體現的; 還說清楚了高維歐氏空間, 當維數大於3時, 爲何微分與積分是一組對立運算, 它們是如何體現的; 甚至還說清楚了在微分流形上, 爲何微分與積分是一組對立運算, 它們是如何體現的。衆所周知, 微分流形是現代數學中最爲重要的概念之一, 很多現代數學都是在微分流形上進行探討的, 而在微積分的衆多定理中, 在微分

流形上用得最多的就是流形上的 Stokes 公式 (2)。也可以說, Stokes 公式 (2) 是微積分這門學科的一個頂峰, 它使微積分從古典走向現代, 是數學中少有的簡潔、美麗而深刻的定理之一。

這又使我們想起了在第一講中我們反覆引用得 Hilbert 的那段精闢的論述, 外微分形式就是“更有力的工具和更簡潔的方法”, 而“這些工具與方法同時會有助於理解已有的理論”, 即已有的微積分的理論。例如: 上面說到的, 在外微分形式的觀點下, 已有的 Green 公式、Stokes 公式與 Gauss 公式, 甚至一元微積分的微積分基本定理, 原來是一回事, 只是在不同空間的不同區域得到的不同形式。而相對於用外微分形式表達的 Stokes 公式 (2), 那些原有的公式, 就成爲了“陳舊的、複雜的東西”, 要記住公式 (2) 是十分容易的事, 而要記住那些原來的公式, 相對來講要困難得多, 的確可以把原來那些公式“拋到一邊” 要用的時候, 從公式 (2) 直接推導一下就很容易得到, 而所以會如此, 是因爲外微分形式的產生與引入是數學中 “一步眞正的進展”, 事實也的確如此, 由於外微分形式的引入, 使現代數學的面貌發生了極大的改變。

外微分形式較之原有的微積分當然是更爲“高級”, 但這個相對“高級”的數學, 以公式 (2) 來敍述微分形式在邊界上的積分與內部的積分的關係時是這樣地容易、簡明, 實際上它的證明也並不困難。而不用外微分形式的微積分較之用外微分形式的微積分來說就是“初級”, 但用這個相對“初級”的數學來敍述微分形式在邊界上的積分與內部的積分的關係時, 所出現的三個公式, 是這樣的複雜, 且證明也比較困難, 公式不易記住。這再次說明了數學中高與低, 難與易的辨證關係, 即“高級”的數學未必難, 往往反而易, 而“初級”的數學未必容易, 往往反而難。再重新回到三維歐氏空間中, 在這空間中, 有著廣泛的應用, 尤其在物理上有廣泛應用的三“度”, 即梯度 (gradient)、旋度 (curl) 與散度 (divergence)。現在在外微分形式的意義下來重新認識它們。

先看零次外微分形式$\omega_0 = f(x,y,z)$, 它的外微分爲

$$d\omega_1 = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

而 $f(x,y,z)$ 的梯度爲

$$\operatorname{grad}(f) = \nabla(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

所以梯度是與零次外微分形式的外微分相當。

再看一次外微分形式 $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz$, 它的外微分爲

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dy\wedge dz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dz\wedge dx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy \\ &= \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned}$$

而向量 $\vec{u} =< P, Q, R >$ 的旋度爲

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(\vec{u}) = \nabla \times (\vec{u}) &= \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\vec{k}\\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\end{aligned}$$

這裏$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 分別爲沿 x 軸、y 軸、z 軸方向的單位向量, 所以旋度是與一次外微分形式的外微分相當。

最後來看二次外微分形式$\omega_2 = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$, 它的外微分爲

$$d\omega_2 = \Big(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\Big)dx \wedge dy \wedge dz$$

而向量 $\vec{v} =< A, B, C >$ 的散度爲

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

所以散度是與二次外微分形式的外微分相當。從這個觀點來看, 還有沒有可能產生具有這樣性質的其他的“度” 呢? 很明顯, 在三維歐氏空間, 這是不可能的了。因爲在三維歐氏空間, 三次外微分形式的外微分爲零, 所以不可能再有與之相當的“度”了。所以從外微分形式的觀點, 在三維歐氏空間, 有而且只能有這三個度, 即梯度、旋度、散度, 它們與外微分形式的對應關係可列表如下:

外微分形式的次數	對應的度
0	梯度
1	旋度
2	散度

事實上, 前面提到的 Pioncaré 引理$dd\omega = 0$, 具有其場論的意義, 當 ω 爲零次外微分形式, 即 $\omega = f$ 時, $dd\,f = 0$ 就是

$$\operatorname{curl}\big(\operatorname{grad}(f)\big) = \vec{0}$$

當 ω_1 爲一次外微分形式, 即 $\omega_1 = Pdx+Qdy+Rdz$時, 記 $\vec{u} =< P, Q, R >$, 那麼 $dd\omega_1 = 0$ 就是

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}(\vec{u}) = 0$$

同樣, Poincaré 引理之逆也有其場論意義。我們知道: $\vec{v}$ 爲勢場的充分必要條件爲$\vec{v}$無旋場, 即 $\vec{v}=\nabla(f)$ 的充要條件爲 $\mathrm{curl}(\vec{v})=\vec{0}$, 這就是 Poincaré 引理及其逆: $d\omega=0$ 必有 $\omega=d\alpha$, 即如果一次微分形式的外微分爲零, 則外微分形式一定是一個函數 (零次外微分形式) 的外微分。另一方面, $\vec{v}$如果爲旋度場若且唯若 $\vec{v}$ 無源場, 即 $\vec{v}=\mathrm{curl}(\vec{v})$ 若且唯若 $\mathrm{div}\,(\vec{v})=0$, 這就是 Poincaré 引理及其逆: $d\omega=0$ 必有 $\omega=d\alpha$, 即如果二次外微分形式的外微分爲零, 則此外微分形式一定是一個一次外微分形式的外微分。

参考文獻

1. George William de Rham, Differential Manifold. Springer-Verlag, New York, 1981.
2. 吳文俊, 龔昇教授「簡明微積分」讀後感。數學通報, 2000(1), 44-45。

—本文作者龔昇任教於中國科技大學; 張德健任教於美國 Georgetown University 數學系—