數學傳播 39卷2期, pp. 30-55

圖解梯度、散度與旋度

林琦焜

『如果 σ 代表向量函數, $\nabla\sigma$ 就包含有向量與純量兩部分, 它們可以寫成 $S\nabla\sigma$ 和 $V\nabla\sigma$, 我建議純量部分為 σ 的散度 (divergence), 這是向量函數效應的好名字。但是 $\nabla\sigma$, 一般說來也是有向量的部分, 可以稱這種向量為原向量函數的旋度 (curl) 或變體 (version)[1], 它代表了由向量σ 所承載之內容旋轉的量與方向。』

— James Clerk Maxwell (1831∼1879) —

一、前言

正如微積分是為了解決牛頓力學而發明的, 向量分析則是應運電磁學而產生的。學向量分析心中常有電磁學讓你永遠不孤單也不會迷失。我願意再強調一次

『數學沒有物理是瞎子, 物理沒有數學是跛子。』

一個數學系特別是應用數學系把『普通物理』列為選修 (等價於不用修), 等於告訴世人它是一個爛系。歷史告訴我們的還有時代的潮流就是跨領域! 一個只懂數學 (本質上不是真的懂), 而對其它領域無知的人是絕對沒有競爭力。就算是數學專業的人也必須同時對於非主修的科目有所涉獵, 如此才可以培養寬廣的胸襟與開放的心靈, 對於別人的研究也有興趣並懂得欣賞。否則會越來越孤立以至於枯竭, 片面內省的數學玄想只會導致貧瘠。百年前德國哥廷根偉大數學傳統的建立者 Felix Klein (1849∼1925) 就已經有這樣的呼籲:

『我們強烈感受到, 在現代科學思想的快速發展下, 我們的學科正瀕臨孤立的危險。自從現代分析興起以來, 讓數學與理論自然科學雙方皆獲益的親密互動關係, 已經面臨崩潰的威脅。$\cdots$ 今日數學界的當務之急, 是將其純科學部門和其具有最重要應用價值的物理科學部門再次緊密結合, 這種關係以往所得的豐碩成果可以從 Lagrange 和 Gauss 的研究裡看到。』

[1]version 是翻譯、譯本、敘述或異見, 但這個字應分解為*versio-n-*其拉丁文是*vertere* 而*vers-* 的意思是轉動 (to turn)。所以它也翻為*a special form or variant of something* (變體)。

他的吶喊現在看來仍然是先知的警語, 令人深思。看來數學的發展與文明或民主一樣, 不見得都是微分大於0(增函數), 永遠是進步的! 如果你不守護它, 深化其內涵並隨時進步, 一旦獨裁的敗家子出現, 整個數學社會被迫走入歧途, 則幾代人的努力馬上就煙消雲散。

1865年左右, 馬克士威 (James Clerk Maxwell, 1831∼1879) 綜合電磁現象的安培定律及法拉第定律, 建立電磁場的數學理論, 他提出了變化的磁場激發電場的概念之後, 發現還缺少某些重要的東西。假如對這些方程式進行數學變換, 那麼就得出一種與電磁學方程組體系的其它公式矛盾的關係。假如這個方程式藉著一個附加項, 即所謂的位移電流來補充, 那麼這個矛盾就可以克服。所以他提出位移電流來克服電磁學方程組之矛盾, 而且整理成完整的電磁場理論, 因此馬克士威就從法拉第的解釋者, 成爲獨創的學者。馬克士威方程包含了完整的電學、磁學和光學的理論, 這是馬克士威對物理學所作的一項偉大的統一, 將電、磁、光三者合而爲一。但是馬克士威的成果在當時 (1865) 並沒有立即引起數學界的注意與興趣, 所以並不像牛頓與 Leibniz (1646∼1716) 那個年代承襲古希臘的信念:

『大自然是根據數學設計的。』

他們將數學看成是通往大自然的真理之路。這個信仰吸引了 Bernoulli 家族、Euler (1707∼1783)、Lagrange (1736∼1813)、Laplace (1749∼1827)、⋯⋯、一直到 Fourier (1768∼1830), 這些同時具有科學家身份的大數學家爲之獻身, 進而開創了 17∼18世紀數學創造最偉大的年代。更重要的是除了科學之外他們也將理性的精神注入到人文、社會領域。如果 19世紀後半葉的數學家們能夠像 Euler 等人一樣將牛頓的工作視爲研究的核心, 也將 Maxwell 方程當爲最根本重要的問題來關心, 則他們極有可能早就發現愛因斯坦的狹義相對論 (special relativity)、拓撲群及其表現理論還有雙曲偏微分程的大部分理論以及泛函分析。但是數學界卻失去了這大好的機會與 Maxwell 方程攜手開創數學與科學史的第二個黃金年代。事實上那時候數學界並不缺乏有見識的人, 例如, 牛津的數學家 Henry Smith (1826∼1883) 就已經體會到需要新的數學以了解 Maxwell 方程, 並在 1873 年左右呼籲數學家研究馬克士威的著作。但 Smith 已經 46 歲而且他的學養不足以成爲新領域的開創者, 有能力的年輕人並不聽從他的建議。在 20 世紀完成 Smith 先知呼聲的 Hermann Minkowski (1864∼1909) 與 Jacques Hadamard (1865∼1963) 那時分別是 9 歲與 8 歲, Elie Cartan (1869∼1951) 只有 3 歲, 而 Hermann Weyl (1885∼1955), Jean Leray (1906∼1998) 與 Harish Chandra (1923∼1983) 則還沒有出生。我想最主要的原因是19世紀後半葉數學家的興趣是複變函數論、解析數論與不變量理論, 而這些豐富的成果已經形成數學界美學與價值觀的標準, 以至於形式上複雜的 Maxwell 方程被拒絕了。

雖然我們可以說馬克士威是向量分析的創始人, 但他那個時候還沒有向量的符號, 以至於方程式必須以各個分量寫出所以非常的繁複, 這使得他偉大的創見並沒有馬上爲當時的人所認可。如果沒有專門且精準的符號, 則現代數學根本不可能產生。向量分析最重要的進展主要是歸

功於 J. W. Gibbs (1839～1903) 與 O. Heaviside (1850～1925), 甚至連符號也是他們兩人的貢獻。其中 Gibbs 出版了第一本向量分析課本 (Elements of Vector Analysis), 向量分析這個專有名詞正式在此出現。實際上基於非原創性的理由 Gibbs 並不情願出版這本教材, 後來是由他的學生 E. B. Wilson 整理之後才成爲正式的教科書。Gibbs 與 Heaviside 向量符號之比較如下:

	內積	外積	梯度	散度	旋度
Gibbs	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	∇	$\nabla\cdot$	$\nabla\times$
Heaviside	$\mathbf{ab}$	$V\mathbf{ab}$	∇	div	curl

梯度、散度與旋度形式上來看都是一次微分, 但本質上卻有極大的差異。要瞭解它們就必須從 Gauss 散度定理與 Stokes 定理著手, 雖然這兩個定理的內涵都是微積分基本定理, 但是一個關心的是法向量 (散度) 另一個則是切向量 (旋度)。在二維平面給定切向量 (a, b) 則朝外法向量爲 $(b, -a)$, 反過來亦然, 知道其中一個向量立即可得另一個向量。所以二維的 Green 定理同時具有 Gauss 散度定理與 Stokes 定理兩個身分。讀者如果會怕三維空間, 那麼就先把 Green 定理弄清楚, 但不能只學一般微積分課本教你的切向量之情形。這就是主動與被動學習的差異, 你 (妳) 是要當自己生命的主人還是等著讓別人來決定你 (妳) 的未來! 這兩個積分定理的主要貢獻者爲

(1) G. Green (1793～1841)：1828年提出 Green 定理, Green 等式。

(2) 高斯 (Karl Friedrich Gauss, 1777～1855)：提出散度定理。

(3) M. Ostogradsky (1801～1861)：1831年研究熱傳導方程 (heat equation) 時也導出散度定理。

(4) George Gabriel Stokes (1819～1903)：1850 年給 Lord Kelvin (1824～1907) 的信中提到 Stokes 定理, Stokes 1854 年在劍橋的數學競試以這定理爲題目, 其中得獎的學生有 J. C. Maxwell。由此可見學生 Maxwell 遠比老師 Stokes 厲害的多。

本文主要的目的是想要以直觀、圖解的角度來介紹曲線座標系統的梯度、散度與旋度這三個向量分析最重要的概念。大部分數學系只活在一維空間, 把向量分析視爲是微積分的推廣。這是極大的誤解, 同時也帶來錯誤的數學觀。通常學生對於非垂直座標的梯度、散度與旋度都非常之陌生, 頂多就是把它當成公式, 需要的時候再查表。對此我們並不滿意, 公式並不僅僅是公式, 它會講話, 因此我們特別介紹量綱 (因次) 分析 (dimensional analysis) 這個簡單但重要的觀念、直觀且有感覺地認識所有的方程式與 (不) 等式。讀者也應嘗試能從公式中解釋各項之意義, 並從中體會公式 (或方程式) 本身之物理或幾何意義。想更深入瞭解梯度、散度與旋度, 我們需要微分形式 (differential form) 這個微分幾何的基本知識, 我們將在下一篇文章介紹。關

於量綱 (或因次) 分析, 請讀者參閱我在數學傳播的文章[6]。這個觀念是我最有心得也最引以爲豪的方法, 它幫助我直觀地了解方程式, 讓我所學的數學變得有血有淚, 不再是冰冷無情的怪咖。

二、曲線座標系統

回顧一下直角座標的散度 (divergence)、旋度 (curl) 與梯度 (gradient), 這三個算子正好可以對應到向量的三個重要運算：內積 (inner product)、外積 (cross product) 與直積 (direct product) (已知 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 是向量函數、f 是純量函數)

$$\begin{aligned}
&\text{內積：} && \text{向量} \mapsto \text{純量} && \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\
&\text{外積：} && \text{向量} \mapsto \text{向量} && \operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&\text{直積：} && \text{純量} \mapsto \text{向量} && \operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

直角座標之弧長元素與體積元素

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad dV = dxdydz \tag{2.2}$$

還有 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 三個方向之面積元素爲

$$\begin{aligned}
dS_x &= dydz, && x = c \ \text{之平面} \\
dS_y &= dzdx, && y = c \ \text{之平面} \\
dS_z &= dxdy, && z = c \ \text{之平面}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

在彎曲空間梯度、散度與旋度, 這三個算子與弧長元素、體積元素與面積元素要如何重新定義呢？這是我們所關心的問題。

空間上任一位置向量(position vector) 表示爲

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{2.4}$$

其中 $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ 就是直角座標的標準基底, 而且滿足右手法則 $(\mathbf{i}\to\mathbf{j}\to\mathbf{k})$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}$$

如果在線性空間上, 我們可以透過線性變換 (即矩陣) 轉換成其它基底。但是在彎曲空間, 這種想法已無法適用, 那麼座標變換要如何重新定義呢? 仍然回到(2.4), 我們觀察到如果把 x,y,z 視爲變數, 那麼對位置向量 $\mathbf{r}$ 取偏導數, 座標系統可表示爲

$$\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}=\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}=\Big\{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\Big\}\tag{2.5}$$

這個事實由全微分來看是自然的

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}dy+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}dz=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}\tag{2.6}$$

換句話說, $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ 或 $\{\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\}$ 可由位置向量$\mathbf{r}$之一階偏導數來表示。全微分並不受座標之限制, (2.6) 可以換成任意的座標, 也因此提供我們推廣至彎曲空間的思考方式。

考慮一般的曲線座標系統 (curvilinear system)。已知 x_1,x_2,x_3 是 u_1,u_2,u_3 的函數

$$x_i=x_i(u_1,u_2,u_3),\quad u_i=u_i(x_1,x_2,x_3),\quad i=1,2,3\tag{2.7}$$

我們要求 $(x_1,x_2,x_3)\longmapsto(u_1,u_2,u_3)$ 這個變換是一對一, 即 Jacobian

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}&\frac{\partial x_1}{\partial u_2}&\frac{\partial x_1}{\partial u_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1}&\frac{\partial x_2}{\partial u_2}&\frac{\partial x_2}{\partial u_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1}&\frac{\partial x_3}{\partial u_2}&\frac{\partial x_3}{\partial u_3}\end{vmatrix}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\Big)\neq 0\tag{2.8}$$

向量 $\{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2},\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\}$ 正是 $\{u_1,u_2,u_3\}$ 三個曲線之切向量。條件 (2.8) 保證這組向量是線性獨立 (linear independent), 仿 (2.5) 我們可以選取這組來做爲基底, 再化爲單位向量 (這是學數學的好習慣)

$$\mathbf{e}_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1},\quad \mathbf{e}_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2},\quad \mathbf{e}_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\tag{2.9}$$

$$h_1=\Big|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}\Big|,\qquad h_2=\Big|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}\Big|,\qquad h_3=\Big|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}\Big|\tag{2.10}$$

因此 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 是 u_1,u_2,u_3-座標曲線之單位向量, 就是我們所要的彎曲空間之基底, 同時也是 u_1,u_2,u_3-座標曲線的單位切向量。若 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 互相垂直則稱曲線座標系爲正交曲線座標系。因爲我們的目的是詮釋梯度、散度與旋度的物理意義, 爲避免節外生枝, 在這篇文章我們只討論正交曲線座標系。

由全微分得

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}du_3=h_1du_1\mathbf{e}_1+h_2du_2\mathbf{e}_2+h_3du_3\mathbf{e}_3\tag{2.11}$$

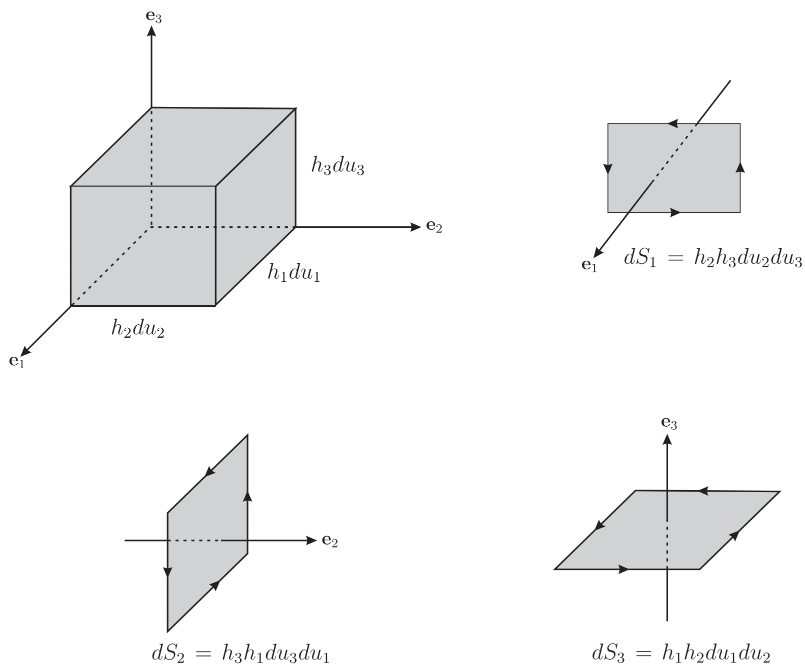


圖 1: 正交曲線座標系統

值得一提的是du_i永遠要配合h_i, 因為h_idu_i才是長度, 其量綱為$[h_idu_i] = \mathrm{L}$, 這個事實我們一直會用到。由畢氏定理容易看出來弧長元素

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = h_1^2du_1^2 + h_2^2du_2^2 + h_3^2du_3^2 \tag{2.12}$$

體積元素與各個面的表面積則為 (請參考圖 1)

$$dV = dx_1dx_2dx_3 = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}du_1du_2du_3 = h_1h_2h_3du_1du_2du_3 \tag{2.13}$$

$$dS_1 = h_2h_3du_2du_3, \qquad dS_2 = h_3h_1du_3du_1, \qquad dS_3 = h_1h_2du_1du_2 \tag{2.14}$$

讀者很容易可以驗證

$$[dV] = \mathrm{L}^3, \qquad [dS_i] = \mathrm{L}^2, \quad i = 1,2,3$$

例題 2.1 (圓柱座標)**.** 空間上任意一點 (x,y,z) 可以表示為圓柱座標 (r,θ,z)

$$\mathbf{r} = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \tag{2.15}$$

$$h_1 = h_r = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\right| = 1, \qquad h_2 = h_\theta = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = r, \qquad h_3 = h_z = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right| = 1 \tag{2.16}$$

所以

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

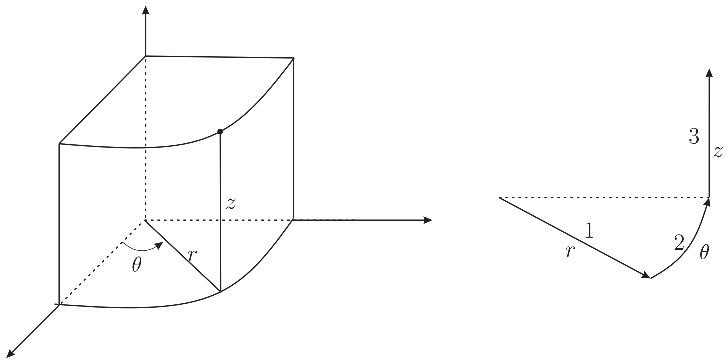


圖 2: 圓柱座標

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \tag{2.17}$$
$$\mathbf{e}_z = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

容易驗證 $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ 是彼此互相垂直, 而且滿足右手法則

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta, &&\mathbf{e}_\theta \perp \mathbf{e}_z, &&\mathbf{e}_z \perp \mathbf{e}_r \\ &\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z, &&\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r, &&\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{2.18}$$

爲何其右手法則之順序是 $r \to \theta \to z$ 呢? 可以這麼看：從原點沿著半徑到 r, 而後逆時針轉 θ, 最後再垂直爬升到 z (參考圖 2 圖形路徑 $1 \to 2 \to 3$), 是不是正好就是右手法則！

位置向量之全微分爲

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z, \qquad [dr] = [rd\theta] = [dz] = \mathrm{L} \tag{2.19}$$

而圓柱座標之弧長元素、體積元素與各個面的表面積則爲 (請參考圖 3)

$$\begin{aligned} &ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2, \qquad dV = rdrd\theta dz \\ &dS_r = rd\theta dz, \qquad dS_\theta = drdz, \qquad dS_z = rdrd\theta \end{aligned} \tag{2.20}$$

這裡沒有必要透過全微分與複雜的連鎖律來得到弧長元素 ds^2, 因爲 $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ 是一正交系統, 無窮小方塊 (蛋糕形狀) 的長寬高爲 $dr, rd\theta, dz$, 所以由畢氏定理容易看出來弧長元素 $(2.20)_1$, 一旦長寬高決定了則體積元素與各個面的表面積可由圖形直觀地看出來。

例題 2.2 (球座標)**.** 空間上任意一點 (x, y, z) 可以表示爲球座標 (ρ, φ, θ)

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi) \tag{2.21}$$

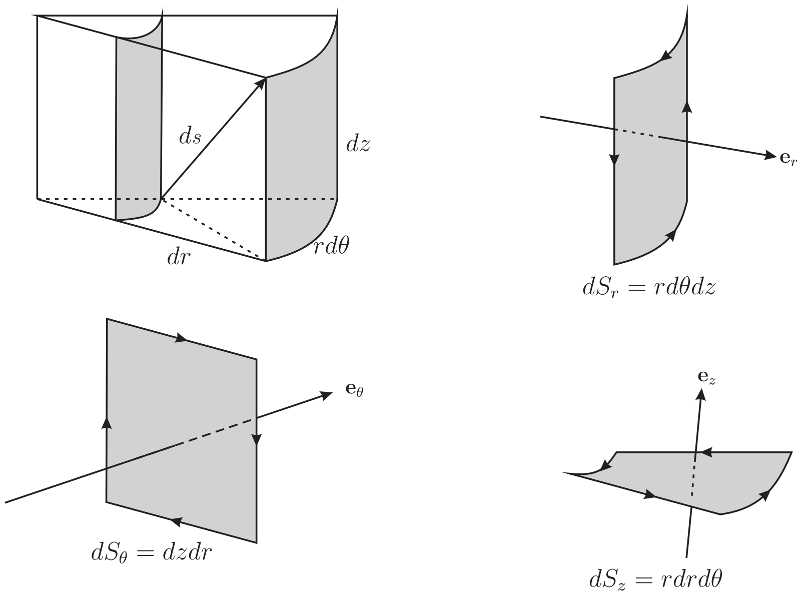


圖 3: 圓柱座標各個面

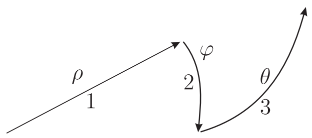


圖 4: 球座標之右手法則

$$h_1 = h_\rho = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right| = 1, \qquad h_2 = h_\varphi = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = \rho, \qquad h_3 = h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = \rho \sin\varphi \quad (2.22)$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi) \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi) \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)
\end{aligned} \quad (2.23)$$

實際上$\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta\}$ 形成一右手正交座標系統。為何其右手法則之順序是 $\rho \to \varphi \to \theta$ 呢 ? 可以這麼看：從原點順著半徑到 ρ, 而後垂直往下轉高低角 φ (緯度!), 最後再水平逆時針轉水平角 θ (經度!), (請參考圖 4 圖形路徑 $1 \to 2 \to 3$), 是不是正好就是右手法則! 位置向量之全微分為

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + \rho\sin\varphi d\theta\mathbf{e}_\theta \quad (2.24)$$

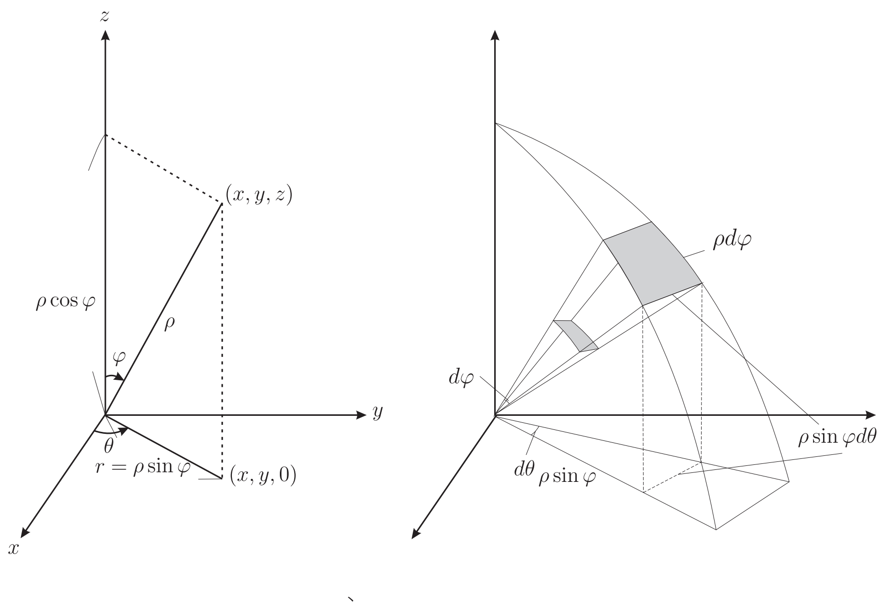


圖 5: 球座標

因爲角度與三角函數不具有量綱, $[d\varphi] = [\sin\varphi] = [d\theta] = 1$, 所以

$$[d\rho] = [\rho d\varphi] = [\rho \sin\varphi d\theta] = \mathrm{L}$$

要特別提醒讀者的是第三個邊長是 $\rho \sin\varphi d\theta$ 並不是 $\rho d\theta$, 因爲球面上在相同高低角(相同緯度)兩點之弧長投影至赤道這個平面時其對應的圓的半徑等於 $\rho \sin\varphi$, 所以這兩點的距離爲 $\rho \sin\varphi d\theta$, $\sin\varphi$ 這個量顯示的是投影的效應。對於球座標我們仍然先掌握無窮小方塊(像西瓜切片但要切除尖的部分之形狀) 的三邊長等於 $d\rho$, $\rho d\varphi$, $\rho \sin\varphi d\theta$, 所以球座標之弧長元素、體積元素與各個面的表面積爲

$$\begin{aligned} &ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 \sin^2\varphi d\theta^2, \qquad dV = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &dS_\rho = \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta, \qquad dS_\varphi = \rho \sin\varphi d\rho d\theta, \qquad dS_\theta = \rho d\rho d\varphi \end{aligned} \tag{2.25}$$

三、方向導數 — 梯度

正如本節之標題: 梯度本質上是方向導數。給定方向 ν 則純量函數 f 之方向導數定義爲

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu \tag{3.1}$$

雖然這是一個等式但左右兩邊卻有本質上的差異。因爲方向導數 $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ 與座標之選取無關, 所以要將梯度推廣到曲線座標系統必須從方向導數著手。

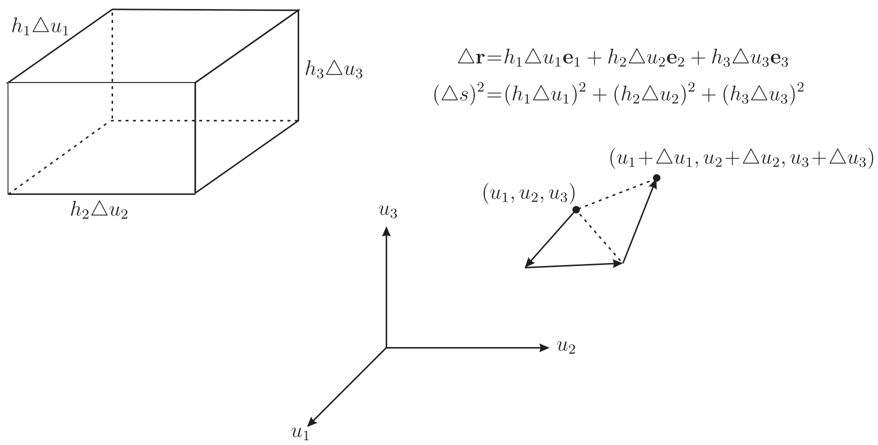


圖 6: (u_1,u_2,u_3) 到 $(u_1+\triangle u_1,u_2+\triangle u_2,u_3+\triangle u_3)$ 之變化

由 (3.1) 直觀而言, 梯度 ∇f 就是方向導數 $\frac{\partial f}{\partial\nu}$ 除以 ν! 考慮 f 從 (u_1,u_2,u_3) 到 $(u_1+\triangle u_1,u_2+\triangle u_2,u_3+\triangle u_3)$ 之變化並利用連接這兩點之弦的向量 $\triangle\mathbf{r}=h_1\triangle u_1\mathbf{e}_1+h_2\triangle u_2\mathbf{e}_2+h_3\triangle u_3\mathbf{e}_3$ 得 (請參考圖 6)

$$\begin{aligned}\triangle f&=f(u_1+\triangle u_1,u_2+\triangle u_2,u_3+\triangle u_3)-f(u_1,u_2,u_3)\\&=\frac{\partial f}{\partial u_1}\triangle u_1+\frac{\partial f}{\partial u_2}\triangle u_2+\frac{\partial f}{\partial u_3}\triangle u_3+\cdots\\&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}h_1\triangle u_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}h_2\triangle u_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}h_3\triangle u_3+\cdots\\&=\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3\right)\cdot\triangle\mathbf{r}+\cdots\end{aligned}$$

再除以長度 $\triangle s=|\triangle\mathbf{r}|=\sqrt{h_1^2(\triangle u_1)^2+h_2^2(\triangle u_2)^2+h_3^2(\triangle u_3)^2}$

$$\frac{\triangle f}{\triangle s}=\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3\right)\cdot\frac{\triangle\mathbf{r}}{\triangle s}+\cdots$$

取極限 $(\triangle s\to 0)$ 將弦變爲單位切向量 $\nu=\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 得方向導數

$$\frac{\partial f}{\partial\nu}=\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3\right)\cdot\nu \tag{3.2}$$

比較 (3.1)、(3.2) 兩式得

$$\nabla f=\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3 \tag{3.3}$$

藉由類比, 實際上 (3.3) 這個公式是很容易猜得出來。只需要將 $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ 換爲 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$、$\{x,y,z\}=\{x_1,x_2,x_3\}$ 換爲 $\{u_1,u_2,u_3\}$, 唯一要注意的是 ∂u_i 一定要伴隨著 h_i, 所以每一項都有 $\frac{1}{h_i}$ 是自然的。而背後真正的理由則是: 量綱平衡。

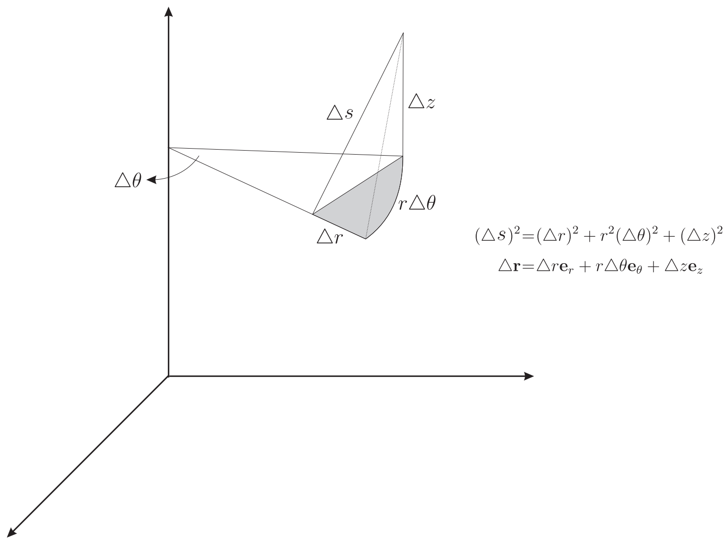


圖 7: (r,θ,z) 到 $(r+\triangle r,\theta+\triangle\theta,z+\triangle z)$ 之變化

例題 3.1. 圓柱與球座標之梯度 (請參考圖 $7,8$)

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

簡單的量綱分析可以看出上式的合理性, 我們留給讀者去 看出來。讀者當然可以由 (3.3) 直接代入驗證上式, 但是我們並不鼓勵這種被動的學習方式, 反而是從方向導數著手, 類似前面的推導方式自己走過一遍, 因爲數學是非常的存在主義: *沒有人可以代替你相信!*

四、Gauss 散度定理 — 散度

如果從散度的原始定義 $(2.1)_1$, 它只告訴我們微分而已甚麼東西都看不到。要瞭解散度就必須從 Gauss 散度定理著手

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{A}dV=\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS,\qquad S=\partial V \tag{4.1}$$

兩邊同時除以體積 $|V|$, 然後再令 $|V|\to 0$ 得

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\lim_{|V|\to 0}\frac{1}{|V|}\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS \tag{4.2}$$

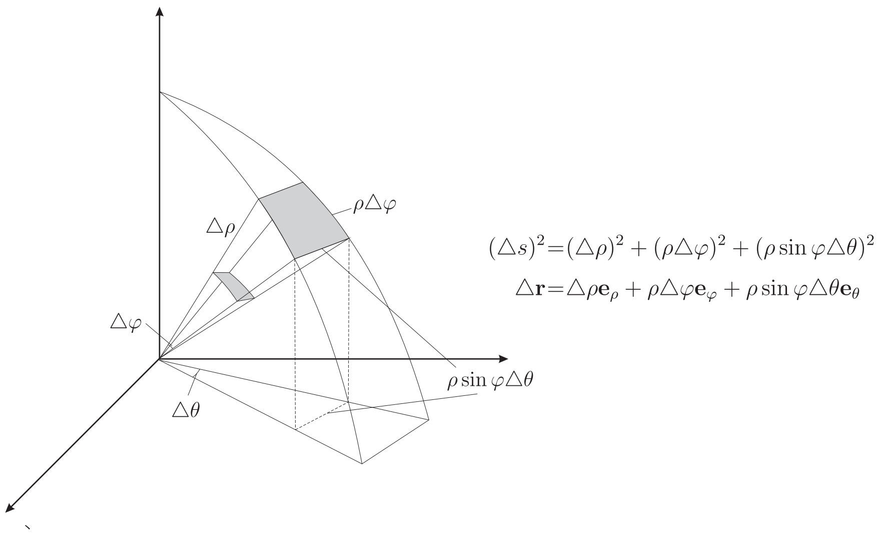


圖 8: (ρ,φ,θ)到$(\rho+\triangle\rho,\varphi+\triangle\varphi,\theta+\triangle\theta)$ 之變化

所以散度 div$\mathbf{A}$ 就是單位體積向量場 $\mathbf{A}$ 之通量 (flux)。這個定義除了物理意義清楚之外, 也告訴我們散度與所選取之座標無關, 換言之高斯散度定理提供我們絕佳的散度之定義。

$$\text{散度} \iff \text{通量(曲面積分)} \iff \text{Gauss 散度定理}$$

簡單的量綱分析得

$$[\mathrm{div}\mathbf{A}] = \frac{1}{[|V|]}\iint_S [\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS] = \frac{1}{\mathrm{L}^3}[\mathbf{A}]\mathrm{L}^2 = \frac{[\mathbf{A}]}{\mathrm{L}}$$

假設 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, 我們先考慮 $\mathbf{e}_1$-方向之通量。此時向量場由 u_1 到 $u_1+\triangle u_1$, 利用 $\triangle S_1 = (h_2\triangle u_2)(h_3\triangle u_3)$ 得

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS &= (A_1\triangle S_1)(u_1+\triangle u_1) - (A_1\triangle S_1)(u_1)\\
&\approx \left[(A_1h_2h_3)(u_1+\triangle u_1) - (A_1h_2h_3)(u_1)\right]\triangle u_2\triangle u_3\\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)\triangle u_1\triangle u_2\triangle u_3 \qquad \text{(均值定理)}\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)h_1\triangle u_1h_2\triangle u_2h_3\triangle u_3
\end{aligned}$$

這裡 A_1, h_2, h_3 是 u_1-函數 (因爲 u_2, u_3 固定)。$\mathbf{e}_1$-方向有兩個面: 前面與後面, 負號代表後面。同理可以考慮 $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$-方向之通量, 由於 $\triangle S_2 = (h_3\triangle u_3)(h_1\triangle u_1)$、$\triangle S_3 = (h_1\triangle u_1)(h_2\triangle u_2)$ 得

$$\iint_{S_2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = (A_2\triangle S_2)(u_2+\triangle u_2) - (A_2\triangle S_2)(u_2)$$

$$\begin{aligned}
&\approx [(A_2h_3h_1)(u_2+\triangle u_2)-(A_2h_3h_1)(u_2)]\triangle u_3\triangle u_1\\
&=\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)\triangle u_2\triangle u_3\triangle u_1\\
&=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)h_2\triangle u_2h_3\triangle u_3h_1\triangle u_1
\end{aligned}$$

這裡 A_2, h_3, h_1 視爲 u_2-函數 (因爲 u_3, u_1 固定)

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS &= (A_3\triangle S_3)(u_3+\triangle u_3)-(A_3\triangle S_3)(u_3)\\
&\approx [(A_3h_1h_2)(u_3+\triangle u_3)-(A_3h_1h_2)(u_3)]\triangle u_1\triangle u_2\\
&=\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\triangle u_3\triangle u_1\triangle u_2\\
&=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)h_3\triangle u_3h_1\triangle u_1h_2\triangle u_2
\end{aligned}$$

這裡 A_3, h_1, h_2 視爲 u_3-函數 (因爲 u_1, u_2 固定)。將這三部分通量相加之後再除以體積 $h_1\triangle u_1h_2\triangle u_2h_3\triangle u_3$ 得

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right] \tag{4.3}$$

只要記得方程式會講話則 (4.3) 實際上是非常直觀且容易記憶的。以第一項 ($\mathbf{e}_1$-方向) 而言

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)$$

把 $h_1h_2h_3$ 視爲體積、h_2h_3 爲底面積則 $A_1h_2h_3$ 是通量, 但有兩個面其朝外法向量正好一正一負兩個通量必須相減, 也就是差分, 在無窮小的時候 $(u_1\to 0)$ 差分變微分, 所以出現 $\frac{\partial}{\partial u_1}$。同理第二、三項也是如此分析。表面上 (4.3) 雖然只有三項但本質上是六項, 正是無窮小方塊的六個面。所以 (4.3) 告訴我們的正是: 單位體積之通量 (三個方向)。

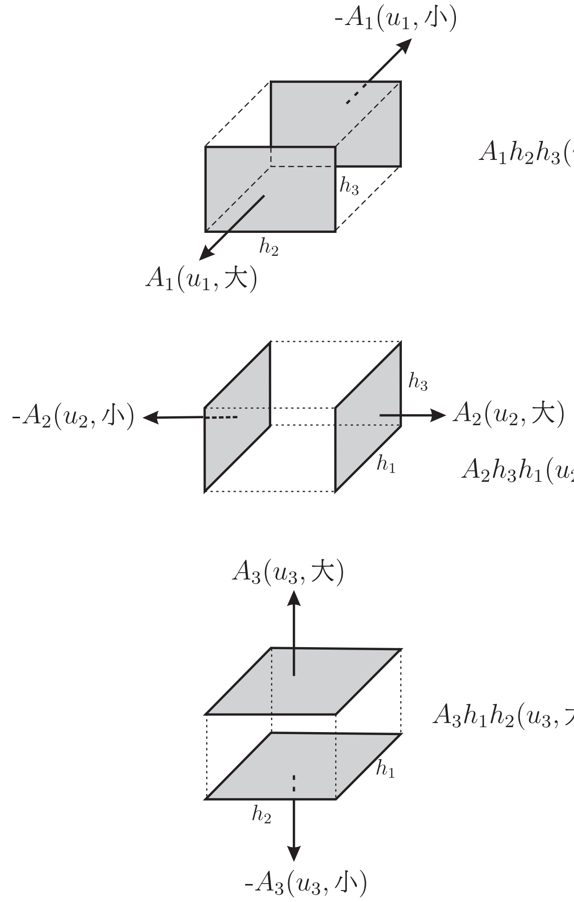
例題 4.1. 圓柱座標之散度*:* $\mathbf{A}=A_r\mathbf{e}_r+A_\theta\mathbf{e}_\theta+A_z\mathbf{e}_z$

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_rr)+\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(A_zr)\right] \tag{4.4}$$

我們利用圖解(請參考圖 10) 來看出三個方向之通量*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r:\ & A_r\cdot r\cdot 1(r\text{: 大})-A_r\cdot r\cdot 1(r\text{: 小})\approx\frac{\partial}{\partial r}(A_rr)\\
\mathbf{e}_\theta:\ & A_\theta\cdot 1\cdot 1(\theta\text{: 大})-A_\theta\cdot 1\cdot 1(\theta\text{: 小})\approx\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta)\\
\mathbf{e}_z:\ & A_z\cdot r\cdot 1(z\text{: 大})-A_z\cdot r\cdot 1(z\text{: 小})\approx\frac{\partial}{\partial z}(A_zr)
\end{aligned}$$

再除以體積 $h_1h_2h_3=h_rh_\theta h_z=1\cdot r\cdot 1=r$ 就是 (4.4)。



$$A_1h_2h_3(u_1,\text{大}) - A_1h_2h_3(u_1,\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)$$

$$A_2h_3h_1(u_2,\text{大}) - A_2h_3h_1(u_2,\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1)$$

$$A_3h_1h_2(u_3,\text{大}) - A_3h_1h_2(u_3,\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)$$

圖 9: $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3,$之通量

例題 4.2. 球座標之散度*:* $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_\theta \mathbf{e}_\theta$

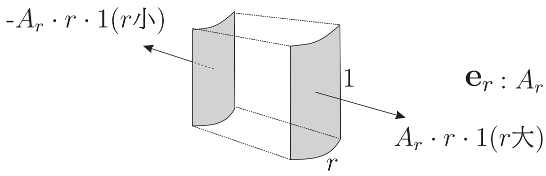
$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2 \sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(A_\rho \rho^2 \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi \rho \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \rho)\right] \tag{4.5}$$

此時體積為 $h_1h_2h_3 = h_\rho h_\varphi h_\theta = \rho^2 \sin\varphi$, 而三個方向之通量為 (請參考圖 11, 12)

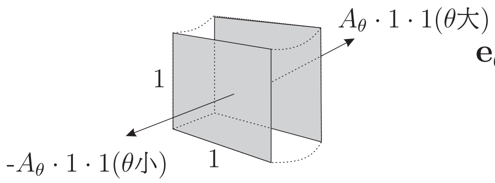
$$\mathbf{e}_\rho:\ A_\rho \cdot \rho \cdot \rho \sin\varphi(\rho\text{: 大}) - A_\rho \cdot \rho \cdot \rho \sin\varphi(\rho\text{: 小}) \approx \frac{\partial}{\partial\rho}(A_\rho \rho^2 \sin\varphi)$$

$$\mathbf{e}_\varphi:\ A_\varphi \cdot \rho \sin\varphi \cdot 1(\varphi\text{: 大}) - A_\varphi \cdot \rho \sin\varphi \cdot 1(\varphi\text{: 小}) \approx \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi \rho \sin\varphi)$$

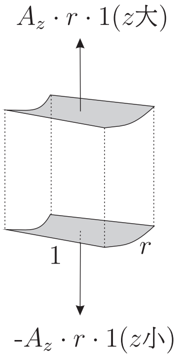
$$\mathbf{e}_\theta:\ A_\theta \cdot \rho \cdot 1(\theta\text{: 大}) - A_\theta \cdot \rho \cdot 1(\theta\text{: 小}) \approx \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \rho)$$



$$\mathbf{e}_r : A_r \cdot r \cdot 1(r\text{大}) - A_r \cdot r \cdot 1(r\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial r}(A_r \cdot r)$$

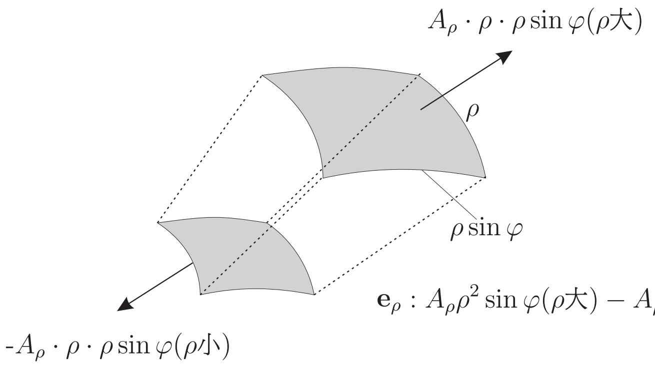


$$\mathbf{e}_\theta : A_\theta \cdot 1 \cdot 1(\theta\text{大}) - A_\theta \cdot 1 \cdot 1(\theta\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta)$$



$$\mathbf{e}_z : A_z \cdot r \cdot 1(z\text{大}) - A_z \cdot r \cdot 1(z\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial z}(A_z \cdot r)$$

圖 10: 圓柱座標$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$,之通量



$$\mathbf{e}_\rho : A_\rho \rho^2 \sin\varphi(\rho\text{大}) - A_\rho \rho^2 \sin\varphi(\rho\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_1}(A_\rho \rho^2 \sin\varphi)$$

圖 11: 球座標 $\mathbf{e}_\rho$ 之通量

五、**Stokes** 定理 — 旋度

同樣從旋度的原始定義 $(2.1)_2$, 甚麼東西都看不到。旋度直接聯想就是環流 (circulation)

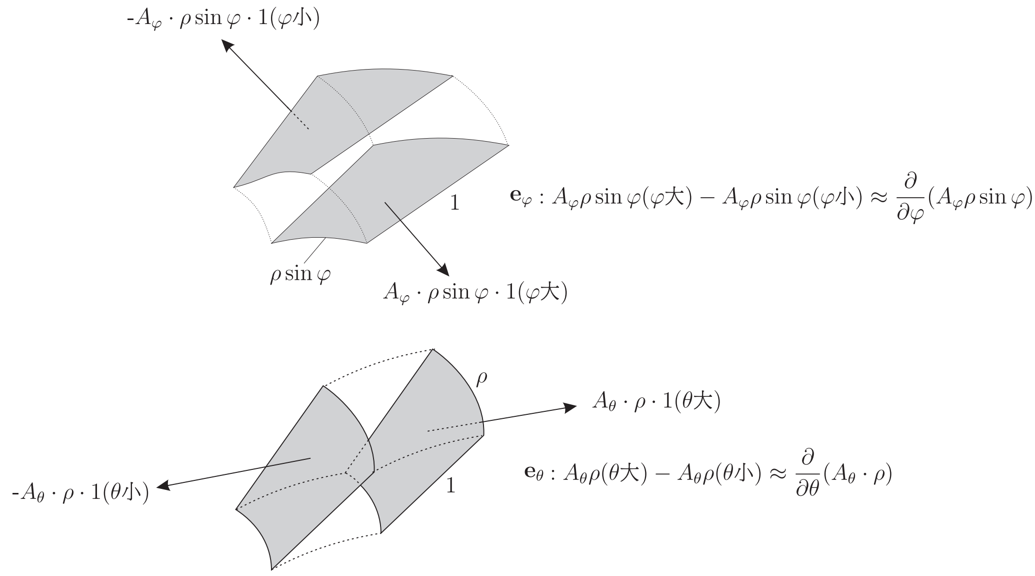


圖 12: 球座標 $\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ 之通量

或者是功 (work) 也就是線積分, 所以要瞭解旋度就必須從 Stokes 定理開始

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \qquad C = \partial S \tag{5.1}$$

要提醒讀者的是圍道C的方向與朝外法向量 $\mathbf{n}$ 必須滿足右手法則 (如果將 $\mathbf{n}$ 當作大拇指的方向則圍道 C 是以逆時針方向爲正)。(5.1) 兩邊同時除以曲面面積 $|S|$, 然後再令 $|S| \to 0$ 得

$$\text{curl } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lim_{|S| \to 0} \frac{1}{|S|} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{5.2}$$

因爲 $|\text{curl } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}| \leq |\text{curl } \mathbf{A}|$, 所以旋度 curl $\mathbf{A}$ 可以詮釋爲單位面積向量場 $\mathbf{A}$ 之最大環流。由此可知旋度 curl $\mathbf{A}$ 之量綱 (或因次; dimension) 等於 $\mathbf{A}$ 之量綱除以長度

$$[\text{curl } \mathbf{A}] = \frac{[\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}]\mathrm{L}}{\mathrm{L}^2} = \frac{[\mathbf{A}]}{\mathrm{L}}$$

因爲線積分與座標無關, 所以旋度與所選取之座標無關, 換言之 Stokes 定理提供我們絕佳的旋度之定義

$$\text{旋度} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{環流(線積分)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Stokes定理}$$

假設 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$。我們先考慮 $\mathbf{e}_1$-方向, 此時 S_1 是前面

$$\mathbf{e}_1 \perp S_1, \qquad C_1 = \partial S_1, \qquad |S_1| = (h_2 \triangle u_2)(h_3 \triangle u_3)$$

按照右手法則 C_1 有四個邊, 所以線積分有四項

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \approx (A_2 h_2)(u_3) \triangle u_2 + (A_3 h_3)(u_2 + \triangle u_2) \triangle u_3$$

$$
\begin{aligned}
&-(A_2h_2)(u_3+\triangle u_3)\triangle u_2-(A_3h_3)(u_2)\triangle u_3\\
&=\left(\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right)\triangle u_2\triangle u_3\\
&=\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right)(h_2\triangle u_2)(h_3\triangle u_3)
\end{aligned}
$$

這裡 A_3h_3, A_2h_2 分別視爲 u_2 與 u_3 的函數。這個線積分再除以 S_1 的面積 $|S_1|$ 得 $\nabla\times\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_1$-方向的分量

$$\nabla\times\mathbf{A}|_{\mathbf{e}_1}=\text{curl }\mathbf{A}|_{\mathbf{e}_1}=\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right)\tag{5.3}$$

同理可以得 $\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$-方向的分量。令 S_1 是右面, 則

$$\mathbf{e}_2\perp S_2,\qquad C_2=\partial S_2,\qquad |S_2|=(h_3\triangle u_3)(h_1\triangle u_1)$$

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}&\approx(A_3h_3)(u_1)\triangle u_3+(A_1h_1)(u_3+\triangle u_3)\triangle u_1\\
&\quad-(A_3h_3)(u_1+\triangle u_1)\triangle u_3-(A_1h_1)(u_3)\triangle u_1\\
&=\left(\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right)\triangle u_3\triangle u_1\\
&=\frac{1}{h_3h_1}\left(\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right)(h_3\triangle u_3)(h_1\triangle u_1)
\end{aligned}
$$

這裡 A_1h_1, A_3h_3 分別視爲 u_3 與 u_1 的函數。所以 $\nabla\times\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_2$-方向 (右面) 的分量爲

$$\nabla\times\mathbf{A}|_{\mathbf{e}_2}=\text{curl }\mathbf{A}|_{\mathbf{e}_2}=\frac{1}{h_3h_1}\left(\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right)\tag{5.4}$$

令 S_3 是上面, 則

$$\mathbf{e}_3\perp S_3,\qquad C_3=\partial S_3,\qquad |S_3|=(h_1\triangle u_1)(h_2\triangle u_2)$$

$$
\begin{aligned}
\oint_{C_3}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}&\approx(A_1h_1)(u_2)\triangle u_1+(A_2h_2)(u_1+\triangle u_1)\triangle u_2\\
&\quad-(A_1h_1)(u_2+\triangle u_2)\triangle u_1-(A_2h_2)(u_1)\triangle u_2\\
&=\left(\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right)\triangle u_1\triangle u_2\\
&=\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right)(h_1\triangle u_1)(h_2\triangle u_2)
\end{aligned}
$$

這裡 A_2h_2, A_1h_1 分別視爲 u_1 與 u_2 的函數。所以 $\nabla\times\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_3$-方向 (右面) 的分量爲

$$\nabla\times\mathbf{A}|_{\mathbf{e}_3}=\text{curl }\mathbf{A}|_{\mathbf{e}_3}=\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right)\tag{5.5}$$

將 (5.3)–(5.5) 合併得

$$
\begin{aligned}
\text{curl } \mathbf{A} = &\frac{1}{h_2h_3}\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\Big)\mathbf{e}_1 \\
&+\frac{1}{h_3h_1}\Big(\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\Big)\mathbf{e}_2 \\
&+\frac{1}{h_1h_2}\Big(\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\Big)\mathbf{e}_3
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

再由 Laplace 降階法結論

$$
\text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix}
\tag{5.7}
$$

註解:

(i) 在計算過程中雖然我們只考慮三個面, 但一共有十二個邊, 因此這個立方體所有面之邊界的線積分都已經考慮到了, 所以最後之結果確實是全部之環流。

(ii) 因爲h_i必須配合∂u_i, 爲了保持量綱平衡$\mathbf{A}$的旋度, 例如第一項 ($\mathbf{e}_1$方向)

$$
\frac{1}{h_2h_3}\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\Big)\mathbf{e}_1
$$

分子分母的h_3、h_2分別彼此抵消而$\frac{1}{h_2}$、$\frac{1}{h_3}$則正好配合 $\frac{\partial}{\partial u_2}$、$\frac{\partial}{\partial u_3}$, 而且可以驗證其量綱 (因次) 等於$[A_1]/\mathrm{L}$ 與 $[\text{curl } \mathbf{A}] = [\mathbf{A}]/\mathrm{L}$ 相同, 至於正負符號則由右手法則 來決定

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3)\mathbf{e}_1 &\Longrightarrow (2 \to 3 \to 1) \quad (+) \\
\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\mathbf{e}_1 &\Longrightarrow (3 \to 2 \to 1) \quad (-)
\end{aligned}
$$

(iii) 由 Stokes 定理知道旋度是單位面積之環流, 事實上 (5.6) 告訴我們的正是如此, 看第一項 ($\mathbf{e}_1$-方向, $\mathbf{e}_1$爲法向量的面)

$$
\frac{1}{h_2h_3}\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\Big)
$$

此時 $\mathbf{e}_3$-方向之線積分 (環流) 爲 $A_3h_3(u_2$大) 與 $-A_3h_3(u_2$小), 當$u_2 \to 0$時這兩項合併得 $\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3)$, (差分變微分!)。同理 $\mathbf{e}_2$-方向之線積分 (環流) 爲 $-A_2h_2(u_3$大) 與 $A_2h_2(u_2$小), 當 $u_3 \to 0$時這兩項合併得 $-\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)$, 因此偏導數是說兩個線積分之差 (正負兩個方向), h_2h_3視爲這個長方形之面積, 整個合併起來就是$\mathbf{e}_1$-方向的單位面積之環流。同理可以討論$\mathbf{e}_2$-方向與$\mathbf{e}_3$-方向。

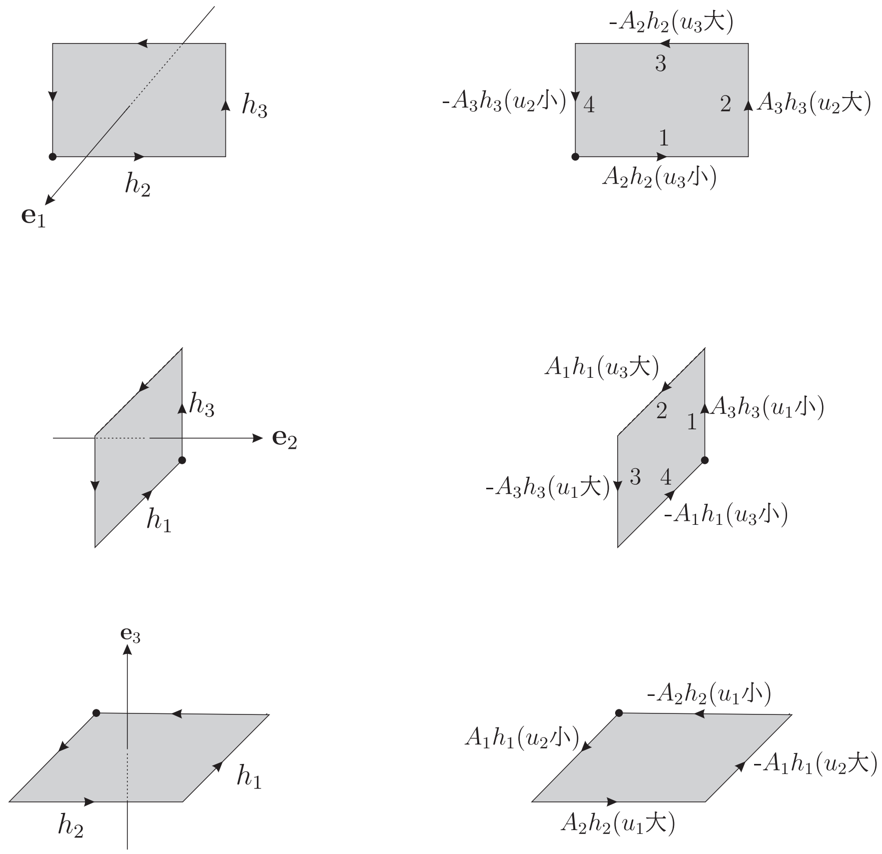


圖 13: $\mathbf{e}_i, i=1,2,3$ 三個方向之環流

我們利用圖解 (請參考圖 13) 來看出三個方向之環流:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_2h_2(u_3\text{小}) + A_3h_3(u_2\text{大}) - A_2h_2(u_3\text{大}) - A_3h_3(u_2\text{小})\\
&\approx \frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\\
\oint_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_3h_3(u_1\text{小}) + A_1h_1(u_3\text{大}) - A_3h_3(u_1\text{大}) - A_1h_1(u_3\text{小})\\
&\approx \frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\\
\oint_{C_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_1h_1(u_2\text{小}) + A_2h_2(u_1\text{大}) - A_1h_1(u_2\text{大}) - A_2h_2(u_1\text{小})\\
&\approx \frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)
\end{aligned}$$

再分別除以 h_2h_3, h_3h_1, h_1h_2 就是 (5.3)–(5.5)。

例題 5.1. 圓柱座標之旋度: $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_z\mathbf{e}_z$

$$\text{curl } \mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - r\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_z \quad (5.8)$$

我們利用圖解 (請參考圖 14) 推得三個方向之環流:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_r} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_\theta r(z\text{小}) + A_z\cdot 1(\theta\text{大}) - A_\theta r(z\text{大}) - A_z(\theta\text{小}) \\
&\approx \frac{\partial}{\partial\theta}(A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(A_\theta r) \\
\oint_{C_\theta} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_z(r\text{小}) + A_r(z\text{大}) - A_z(r\text{大}) - A_r(z\text{小}) \\
&\approx \frac{\partial}{\partial z}(A_r) - \frac{\partial}{\partial r}(A_z) \\
\oint_{C_z} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_r(\theta\text{小}) + A_\theta r(r\text{大}) - A_r(\theta\text{大}) - A_\theta r(r\text{小}) \\
&\approx \frac{\partial}{\partial r}(A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial\theta}(A_r)
\end{aligned}$$

再分別除以 $r, 1, r$ (視為 S_r, S_θ, S_z 之面積) 就是 (5.8)。

例題 5.2. 球座標之旋度: $\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{e}_\rho + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi + A_\theta\mathbf{e}_\theta$

$$\begin{aligned}
\text{curl } \mathbf{A} = &\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi A_\theta) - \rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\rho \\
&+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\theta)\right]\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e}_\theta \quad (5.9)
\end{aligned}$$

我們利用圖解 (請參考圖 15) 推得三個方向之環流:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_\rho} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_\varphi\rho(\theta\text{小}) + A_\theta\rho\sin\varphi(\varphi\text{大}) - A_\varphi\rho(\theta\text{大}) - A_\theta\rho\sin\varphi(\varphi\text{小}) \\
&\approx \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\theta\rho\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\rho) \\
\oint_{C_\varphi} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_\theta\rho\sin\varphi(\rho\text{小}) + A_\rho(\theta\text{大}) - A_\theta\rho\sin\varphi(\rho\text{大}) - A_\rho(\theta\text{小}) \\
&\approx \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho}(A_\theta\rho\sin\varphi) \\
\oint_{C_\theta} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &\approx A_\rho(\varphi\text{小}) + A_\varphi\rho(\rho\text{大}) - A_\rho(\varphi\text{大}) - A_\varphi\rho(\rho\text{小}) \\
&\approx \frac{\partial}{\partial\rho}(A_\varphi\rho) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\rho)
\end{aligned}$$

再分別除以 $\rho^2\sin\varphi, \rho\sin\varphi, \rho$ (視為 $S_\rho, S_\varphi, S_\theta$ 之面積) 就是 (5.9)。

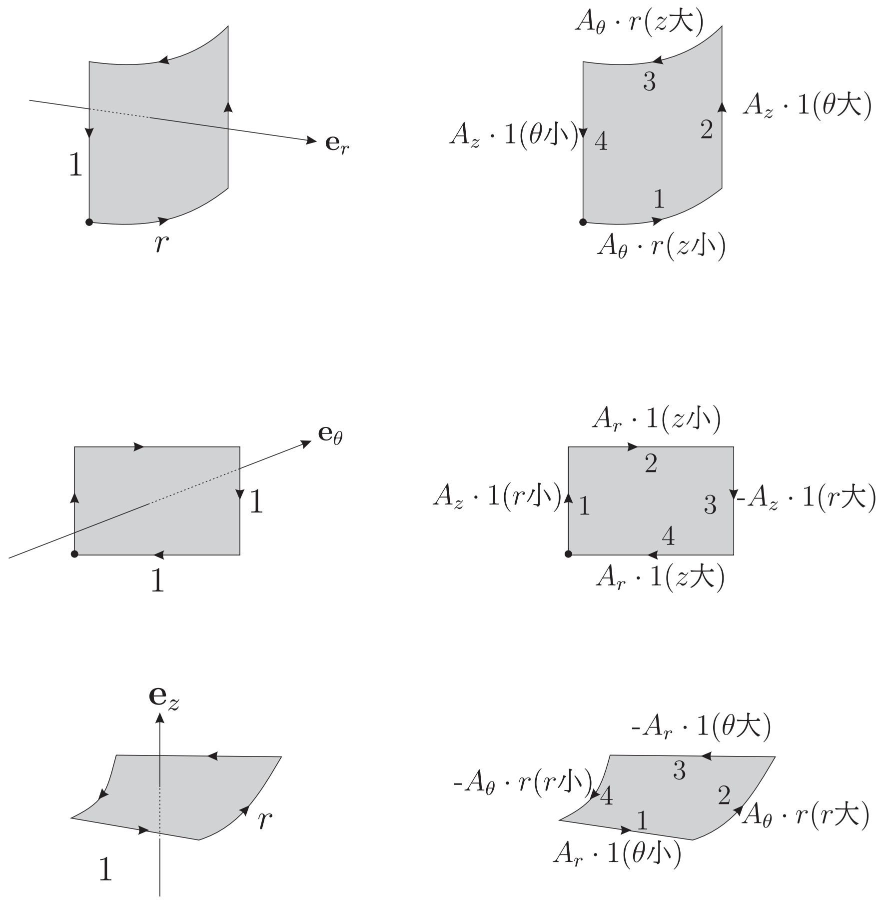


圖 14: 圓柱座標三個方向之環流

六、Laplace 算子

根據 Laplace 算子的定義

$$\Delta = \mathrm{div}\nabla = \nabla\cdot\nabla \tag{6.1}$$

所以由梯度與散度的公式 (3.3) 與 (4.3) 得

$$\begin{aligned}\Delta f &= \mathrm{div}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3\right)\\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.2}$$

雖然這樣可以得到答案, 但對於瞭解 Laplace 算子並沒有幫助, 頂多是散度與梯度的組合。回到 Gauss 散度定理

$$\iiint_V \Delta f dV = \iiint_V \mathrm{div}(\nabla f) dV = \iint_S \nabla f\cdot\mathbf{n} dS = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS \tag{6.3}$$

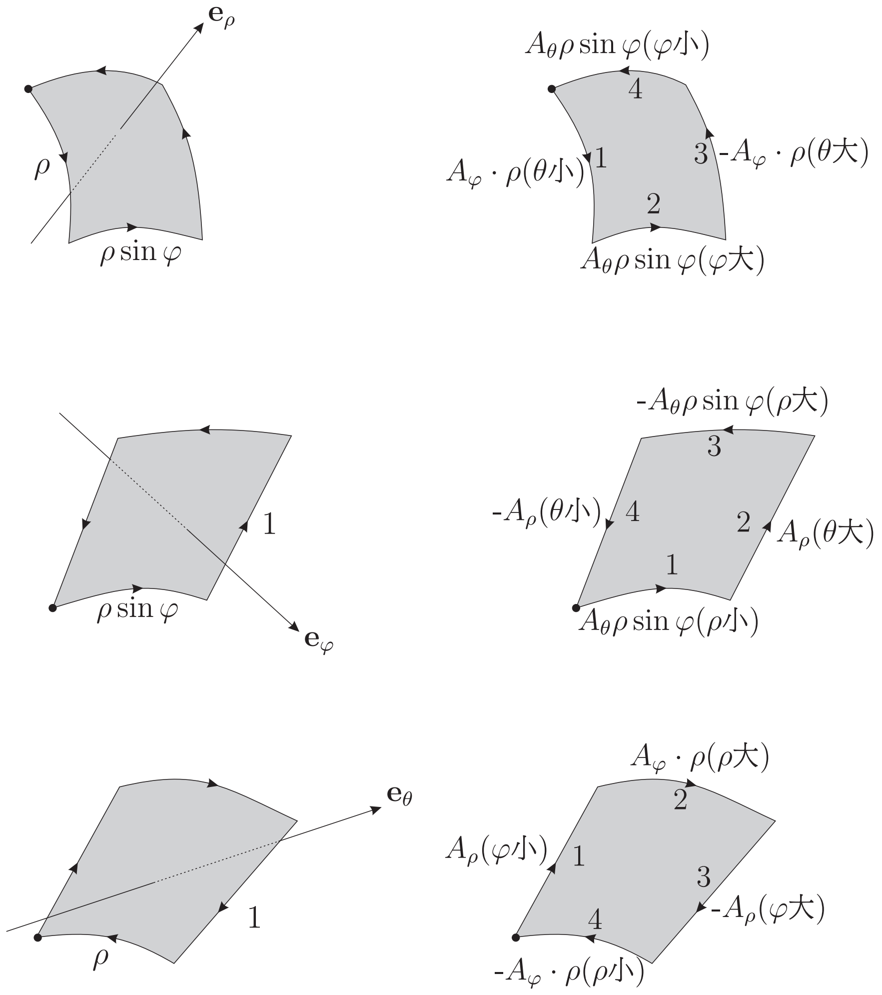


圖 15: 球座標三個方向之環流

兩邊同時除以體積 $|V|$, 然後再令 $|V| \to 0$ 得

$$\Delta f = \lim_{|V|\to 0} \frac{1}{|V|} \iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS \tag{6.4}$$

所以 Δf 就是單位體積 f 之法向量的方向導數 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ 之通量。量綱分析得

$$[\Delta f] = \frac{[f]}{\mathrm{L}^2} = \frac{1}{[|V|]} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\right] [dS] = \frac{1}{\mathrm{L}^3} \frac{[f]}{\mathrm{L}} \mathrm{L}^2 = \frac{[f]}{\mathrm{L}^2}$$

我們利用圖解來推得 (6.2)。$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ 在三個方向之通量爲

$$\mathbf{e}_1\text{-方向 }(S_1\text{曲面}): \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} h_2 h_3 (u_1\text{大}) - \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} h_2 h_3 (u_1\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_1}\Big(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\Big)$$

$$\mathbf{e}_2\text{-方向 }(S_2\text{曲面}): \quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} h_3 h_1 (u_2\text{大}) - \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} h_3 h_1 (u_2\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_2}\Big(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\Big)$$

$$\mathbf{e}_3\text{-方向 }(S_3\text{曲面}):\quad \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}h_1h_2(u_3\text{大}) - \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}h_1h_2(u_3\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial u_3}\Big(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\Big)$$

再除以 $h_1h_2h_3$ (視爲無窮小方塊之體積) 就是 (6.2)。類似於散度 (6.2) 可以詮釋如下:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_1h_2h_3} &\quad\Longrightarrow\quad \text{視爲單位體積}\\
h_2h_3, h_3h_1, h_1h_2 &\quad\Longrightarrow\quad \text{視爲}S_1, S_2, S_3\text{-之面積}\\
\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} &\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\text{-方向之梯度}\\
\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}, \frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} &\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\text{-方向之通量}\\
\frac{\partial}{\partial u_i},\quad i=1,2,3 &\quad\Longrightarrow\quad \text{差分變微分}
\end{aligned}$$

例題 6.1. 極座標之 Laplace 算子

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{6.5}$$

我們仍然利用圖解 (請參考圖 16) 推 (6.5)

$$\frac{\partial f}{\partial r}r(r\text{大}) - \frac{\partial f}{\partial r}r(r\text{小}) \approx \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial f}{\partial r}\Big)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta\text{大}) - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta\text{小}) \approx \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

這兩式相加之後除以 r 得

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

例題 6.2. 圓柱座標之 Laplace 算子

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{6.6}$$

圓柱座標幾乎就是極座標我們留給讀者練習。

例題 6.3. 球座標之 Laplace 算子

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\Big[\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\frac{\partial f}{\partial \rho}\rho^2\sin\varphi\Big) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\varphi\Big) + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

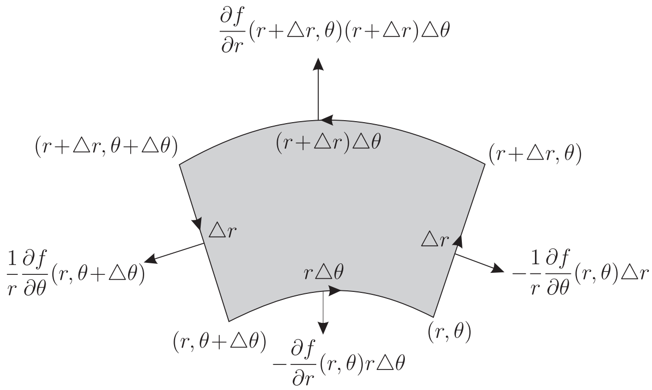


圖 16: 極座標之 Laplace 算子

讀者可以驗證一下量綱關係

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)\approx\frac{1}{\mathrm{L}^2}\frac{1}{\mathrm{L}}\left(\mathrm{L}^2\frac{[f]}{\mathrm{L}}\right)=\frac{[f]}{\mathrm{L}^2}$$
$$\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\approx\frac{1}{\mathrm{L}^2\cdot 1}\frac{1}{1}\left(1\frac{[f]}{1}\right)=\frac{[f]}{\mathrm{L}^2}$$
$$\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\approx\frac{1}{\mathrm{L}^2 1^2}\frac{[f]}{1^2}=\frac{[f]}{\mathrm{L}^2}$$

首先由例題 3.1 得

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$$

所以 (6.7) 圖解如下:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\rho\cdot\rho\sin\varphi(\rho\text{大})-\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\rho\cdot\rho\sin\varphi(\rho\text{小})\approx\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\rho^2\sin\varphi\right)$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\rho\sin\varphi\cdot 1(\varphi\text{大})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cdot\rho\sin\varphi\cdot 1(\varphi\text{小})\approx\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)$$
$$\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot 1\cdot\rho(\theta\text{大})-\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot 1\cdot\rho(\theta\text{小})\approx\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

這三式相加再除以 $\rho^2\sin\varphi$ 就是 (6.7)。

例題 6.4. n 維球座標之 Laplace 算子

$$\Delta f=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\omega_n r^{n-1}\right)+\cdots\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta^* f \tag{6.8}$$

這裡 ω_n 是 n 維空間的單位球面之表面積

$$\omega_n=|S^{n-1}(1)|=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{6.9}$$

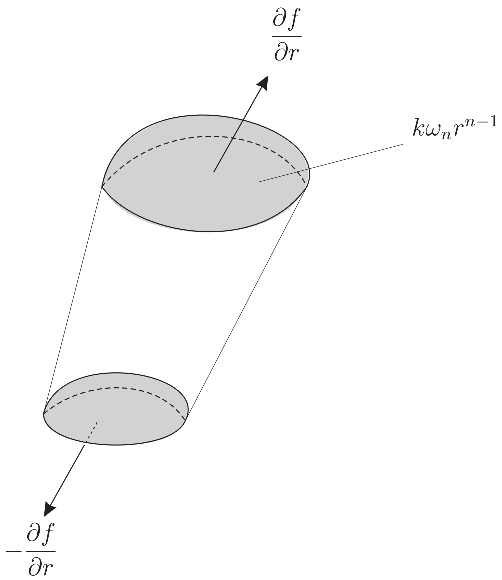


圖 17: n 維球座標之 Laplace 算子

而 Δ^* 則是單位球面 $S^{n-1}(1)$ 上的 Laplace 算子。

n 維球座標其實不難想像。與極座標的扇形方塊類比我們可以想像此時是一個圓錐形的冰淇淋半徑方向的長度還是 dr, 弧長 $rd\theta$ 則取代爲半徑等於 r 之球面的一部分其表面積可以設爲 $k\omega_n r^{n-1}$ (k 與頂角有關), 因此半徑方向之法向方向導數 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 的通量 (請參考圖 17)

$$\frac{\partial f}{\partial r}k\omega_n r^{n-1}(r\text{大}) - \frac{\partial f}{\partial r}k\omega_n r^{n-1}(r\text{小}) \approx k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\omega_n r^{n-1}\right)$$

再除以體積 $1\cdot k\omega_n r^{n-1}$ 就是 (6.8) 第一個等式右邊的第一項。

註解:

(i) 從計算過程中可以看得出來在 (6.8) 出現的 $n-1$ 是半徑爲 r 的球表面積對 r 微分的結果, 其實就是球面的維數 (dimension)。

(ii) 當 $n=2,3$ 時由 (6.5), (6.7) 得

$$\Delta^* f = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}, \qquad \Delta^* f = \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \tag{6.10}$$

誌謝

本文是作者於2009年暑假在中研院數學所《數學名題及其故事》一系列演講之一。後來更在中研院數學所星期一的分析討論班中詳細地以圖解的方式講述了一次, 在此特別謝謝李志豪教授的鼓勵與安排。

參考文獻

1. Michael J. Crowe, A History of Vector Analysis, The evolution of the Idea of a Vectorial System, Dover Publications, Inc. 1985.

   學任何一 門學問正如人生一樣, 偶而要問一下人生三大問題:「我從哪裡來? 我要往哪裡去? 我現在活著要做什麼?」這樣才不致於迷失。一門學問的歷史與其本身一樣重要, 從歷史中去揣摩前人想要解決的問題, 爲何這問題重要; 還有他們的解決方法, 但最重要的還是去體會他們的心路歷程。這本書對於向量分析的歷史介紹幾乎是百科全書式的, 裡面有 Maxwell, Gibbs, . . . 等人的引言, 讀起來樂趣無窮, 我個人是極力推薦。

2. H. M. Schey, Div, Grad, Curl and all that, An Informal Text on Vector Calculus, Fourth Edition, W. W. Norton & Company Inc. 2005.

   這本奇妙的小書具有武功祕笈的特色, 作者是學電機的, 說起來實在是讓我們這些數學科班出身的覺得慚愧, 書中以圖形直觀的介紹梯度、散度與旋度, 是整本書最引人入勝之處, 這也是我個人真正對梯度、散度與旋度有深入了解的開始。這本書原先有中譯本「誰怕向量微積分」但因版權問題已不再出版。

3. Freeman Dyson, Missed Opportunities, Bulletin of Americal Mathematical Society, Vol. 78, 636–652, 1972.

   這是著名物理學家 Freeman Dyson 在 Gibbs 講座的演講紀錄, Dyson 提了不少數學界所曾失去的大好機會, 最後他也提了一些值得數學家投入的好問題。讀數學的人應該與外界的人交流, 你會發現人家對於數學的要求與期待是何等地殷切。如果整天躲在數學館, 只會自艾自憐不知數學要何去何從。

4. 林琦焜, 向量分析, 滄海書局, 2007。
5. 林琦焜, Green 定理與應用, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 84, 25-41 (1997)。
6. 林琦焜, 從量綱看世界, 數學傳播(中央研究院數學所), Vol. 131, p. 13–27 (2009)。
7. 邵錦昌, 淺談 Stokes' 定理與電磁學, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 72, 1-13 (1994)。
8. 蔡聰明, 從醉月湖的面積談起—向量微積分簡介, 數學傳播(中央研究院數學所), Vol. 82, 3-16 (1997)。

   我極力建議學生在大學部時就培養閱讀期刊的習慣, 上面所列是數學傳播裡面與向量分析有關聯的幾篇文章, 有興趣的學生可以上中央研究院數學所的數學傳播網站搜尋相關文獻, 另外有一份英文期刊, American Mathematical Monthly, 也是一份相當適合大學部學生的期刊。

—本文作者爲交通大學應用數學系退休教授—