CONTENTS

Chapter 12

向量值函數

Contents

12.1 向量值函數

12.1.1 空間曲線和向量值函數

Definition 12.1 (向量值函數). 具有下列形式的函數

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} \quad \textit{(平面)}$$

或

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k} \quad \textit{(空間)}$$

是一個向量函數 (*vector-valued function*)，其中 分量函數 (*component functions*) 爲 f, g 和 h 皆是 t 的實值函數。向量值函數時常表示爲 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ 或 $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$。

12.1.2 極限與連續

Definition 12.2 (向量值函數的極限).

1. 如果 $\mathbf{r}$ 是一個向量函數使得 $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$，則

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\mathbf{j} \qquad \text{平面}$$

其中 f 和 g 在 $t \to a$ 有極限。

2. 如果 $\mathbf{r}$ 是一個向量函數使得 $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$，則

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to a} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to a} h(t)\right]\mathbf{k} \qquad \text{空間}$$

其中 f, g 和 h 在 $t \to a$ 有極限。

Definition 12.3 (向量值函數的連續性). 一個向量函數 $\mathbf{r}$ 是 在一點連續 (***continuous at a point***)，當 $\mathbf{r}(t)$ 在 $t \to a$ 時極限存在且 $t = a$ 時也存在，則

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

當在某一區間 I 上的每一點都連續我們稱向量函數 $\mathbf{r}$ 在區間上連續 (***continuous on an interval***)。

12.2 向量值函數的微分和積分

Definition 12.4 (向量值函數的微分). 向量值函數 $\mathbf{r}$ 的導數 (***derivative***) 定義爲

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

對於每一個 t 極限都存在。如果 $\mathbf{r}'(t)$ 存在，則 $\mathbf{r}$ 在 t 點上可微。如果對於所有的 t 在開區間 I 上， $\mathbf{r}'(t)$ 都存在，則 $\mathbf{r}$ 是 在區間 I 上可微。向量值函數的微分可以透過單極限的限制擴展到閉區間。

Theorem 12.1 (向量值函數的微分).

1. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$，式中 f 和 g 皆是 t 可微的函數，則

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}$$

2. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$，式中 f, g 和 h 皆是 t 可微的函數，則

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

Theorem 12.2 (導數的性質)**.** 設 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{u}$ 是 t 的可微函數，令 w 是 t 的可微的實值函數，且 c 是純量。

1. $D_t\left[c\,\mathbf{r}(t)\right] = c\,\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t\left[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)\right] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t\left[w(t)\,\mathbf{r}(t)\right] = w(t)\,\mathbf{r}'(t) + w'(t)\,\mathbf{r}(t)$
4. $D_t\left[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{u}(t)\right] = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{u}(t)$
5. $D_t\left[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)\right] = \mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t)\times\mathbf{u}(t)$
6. $D_t\left[\mathbf{r}\left(w(t)\right)\right] = \mathbf{r}'\left(w(t)\right)w'(t)$
7. 如果 $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = c$，則 $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0$。

12.2.1 向量值函數的積分

Definition 12.5 (向量值函數的積分)**.**

1. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$，其中 f 和 g 在區間 $[a,b]$ 上都連續，則 $\mathbf{r}$ 的 不定積分 (***indefinite integral***)(反導函數) 是

$$\int \mathbf{r}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{j}$$

   和在區間 $a \le t \le b$ 上的 定積分 (***definite integral***) 是

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{j}$$

2. 如果 $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$，其中 f, g 和 h 在區間 $[a,b]$ 上都連續，則 $\mathbf{r}$ 的 不定積分 (反導函數) 是

$$\int \mathbf{r}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{k} \qquad \text{空間}$$

   和在區間 $a \le t \le b$ 上的 定積分 是

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathbf{k}$$

12.4 切線向量和法向量 (補充章節)

12.4.1 切線向量和法向量

Definition 12.6 (切向量). 令 C 是平滑曲線 (*smooth curve*) 代表 $\mathbf{r}$ 在開區間 I 上。單位切向量 (*unit tangent vector*) $\mathbf{T}(t)$ 的定義如下

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

⊡ 曲線的切線 (**tangent line to a curve**) 是通過一個點並平行於單位切向量。

Definition 12.7 (主單位法向量). 設 C 是平滑曲線，代表 $\mathbf{r}$ 在區間 I 上。如果 $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$，則 主單位法向量 (*principal unit normal vector*) 在 t 定義為

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

12.4.2 加速的切線向量和法向量

Theorem 12.3 (加速度向量). 如果 $\mathbf{r}(t)$ 是位置向量，且 C 是平滑曲線和 $\mathbf{N}(t)$ 存在，且加速度向量 $\mathbf{a}(t)$ 是在此平面上，則定義為 $\mathbf{T}(t)$ 和 $\mathbf{N}(t)$。

Theorem 12.4 (加速的切線向量和法向量). 如果 $\mathbf{r}(t)$ 是位置向量，且 C 是平滑曲線 (對於 $\mathbf{N}(t)$ 存在)，則加速的切線向量和法向量如下

$$a_{\mathbf{T}} = D_t[\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\| \ \|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_{\mathbf{T}}^2}$$

注意 $a_{\mathbf{N}} \geq 0$。加速的法向量我們稱為 向心加速度分量 (*centripetal component of acceleration*)。

12.5 弧長及弧度 (補充章節)

12.5.1 弧長

Theorem 12.5 (空間曲線的弧長). 設 C 是一個平面曲線，則 $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$，在區間 $[a,b]$，則 C 的弧長 (*arc length*) 在區間上為

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\ \mathrm{d}t$$

12.5.2 弧長的參數

Definition 12.8 (弧長的參數). 設 C 是一個平面曲線，則 $\mathbf{r}(t)$ 定義在閉區間 $[a,b]$ 上。對於 $a \leq t \leq b$，弧長函數 (*arc length function*) 如下

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,\mathrm{d}u = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\,\mathrm{d}u$$

弧長長度 s 稱爲 弧長參數 (*arc length parameter*)。(如圖 12.1。)

Figure 12.1: 弧長函數

Theorem 12.6 (弧長的參數). 設 C 是一個平面曲線，則

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} \quad 或 \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}$$

其中 s 稱爲弧長參數 (*arc length parameter*)，則

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$$

因此，當 t 是任意數和向量值函數爲 $\mathbf{r}$ 使得 $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$，則 t 必須爲弧長的參數。

12.5.3 曲率

Definition 12.9 (曲率). 設 C 是一個平面曲線 (在平面或空間中) 爲 $\mathbf{r}(s)$ 其中 s 是弧長參數。則 曲率 (*curvature*) K 在 s 定義爲

$$K = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

Theorem 12.7 (曲率的公式). 設 C 是一個平面曲線 (在平面或空間中) 爲 $\mathbf{r}(t)$，則 C 的曲率 K 在 t 如下

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Theorem 12.8 (直角坐標中的曲率). 如果 C 是二次可微的函數圖形爲 $y = f(x)$，則曲率 K 在點 (x,y) 上如下

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Theorem 12.9 (加速度、速度和曲率). 如果對於平滑曲線 C 是位置向量 $\mathbf{r}(t)$，則加速向量如下

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathbf{T} + K \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right)^2 \mathbf{N}$$

式中 C 的曲率爲 K 和 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 是速度。

12.5.4 應用

Table 12.1: 速度的總結、加速度和弧度

令 C 是曲線 (在平面或空間中) 由下給出位置函數：	
$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$	曲線在平面
$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$	曲線在空間中
速度的總結、加速度和弧度：	
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$	速度向量
$\lVert\mathbf{v}(t)\rVert = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lVert\mathbf{r}'(t)\rVert$	速度
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_{\mathbf{T}}\,\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\,\mathbf{N}(t)$	加速度向量
單位切向量和單位法向量：	
$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert}$ 和 $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\lVert\mathbf{T}'(t)\rVert}$	
加速的分量：	
$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\lVert\mathbf{v}\rVert} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	
$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \frac{\lVert\mathbf{v}\times\mathbf{a}\rVert}{\lVert\mathbf{v}\rVert} = \sqrt{\lVert\mathbf{a}\rVert^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = K\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$	
在平面曲率公式：	
$K = \frac{\lvert y''\rvert}{[1+(y')^2]^{3/2}}$	C 來自 $y = f(x)$
$K = \frac{\lvert x'y''-y'x''\rvert}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}$	C 來自 $x = x(t),\ y = y(t)$
在平面或空間曲率公式：	
$K = \lVert\mathbf{T}'(s)\rVert = \lVert\mathbf{r}''(s)\rVert$	s 是弧長參數。
$K = \frac{\lVert\mathbf{T}'(t)\rVert}{\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert} = \frac{\lVert\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\rVert}{\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert^3}$	t 是一般參數。
$K = \frac{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{N}(t)}{\lVert\mathbf{v}(t)\rVert^2}$	

上述公式只適用於平面曲線。

INDEX