

# CONTENTS

<b>11 向量與空間幾何</b>	<b>1</b>
11.6 空間中的曲面 (補充章節)	1
11.6.1 柱面	1
11.6.2 二次曲面	2
11.6.3 旋轉面	2
11.7 柱座標和球座標	2
11.7.1 柱座標	2
11.7.2 球座標	3
<b>Index</b>	<b>4</b>



# Chapter 11

## 向量與空間幾何

### Contents

11.6 空間中的曲面 (補充章節) . . . . .	1
11.6.1 柱面 . . . . .	1
11.6.2 二次曲面 . . . . .	2
11.6.3 旋轉面 . . . . .	2
11.7 柱座標和球座標 . . . . .	2
11.7.1 柱座標 . . . . .	2
11.7.2 球座標 . . . . .	3

## 11.6 空間中的曲面 (補充章節)

- 柱面這個數學定義很只要是母線沿著一條平面曲線平行移動生成出的曲面都稱為柱面，所以不只一般圓柱。

### 11.6.1 柱面

**Definition 11.1** (柱面). 設  $C$  是一條平面上的曲線，而  $L$  是一條與  $C$  所在的平面不平行的直線。所有過  $C$  而與  $L$  平行的直線構成了一個柱面 (*cylinder*)， $C$  稱為柱面的母曲線 (*generating curve*) (或準線 (*directrix*))，過  $C$  而與  $L$  平行的線稱為直紋線 (*rulings*)。

**Definition 11.2** (柱面的方程式). 直紋線與座標軸平行的柱面，其方程式只含對應於其他兩根坐標軸的 (兩個) 變數。

## 11.6.2 二次曲面

**Definition 11.3** (二次曲面). 空間中二次曲面 (*quadric surface*) 的方程式形式如下

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

二次曲面有六個基本型態：橢球面 (*ellipsoid*)，單葉雙曲面 (*hyperboloid of one sheet*)，雙葉雙曲面 (*hyperboloid of two sheets*)，橢錐面 (*elliptic cone*)，橢圓拋物面 (*elliptic paraboloid*) 和 雙曲拋物面 (*hyperbolic paraboloid*)。

- 這裡要認識六種非退化的二次曲面，圖形與對應的方程式之間應該要想清楚，透過與座標平面平行的平面與圖形相截得到的二次曲線可以幫助了解曲面的形狀。
- 這六種二次曲面的認識是爲了之後多變數微積分而準備。多變數微積分的其中一個學習重點是了解曲面長相，像是彎曲的現象與極值的討論。

## 11.6.3 旋轉面

**Definition 11.4** (旋轉面). 如果以半徑函數  $r$  的圖形繞座標軸旋轉所得旋轉曲面 (*surface of revolution*)的方程式分別爲

1. 繞  $x$  軸旋轉： $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$

2. 繞  $y$  軸旋轉： $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$

3. 繞  $z$  軸旋轉： $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

## 11.7 柱座標和球座標

## 11.7.1 柱座標

**Theorem 11.1** (柱座標). 在一個圓柱座標系統 (*cylindrical coordinate system*)中，一點  $P$  的座標記成  $(r, \theta, z)$ 。

1.  $(r, \theta)$  是  $P$  點在  $xy$ -平面投影的座標。
2.  $z$  是原本直角坐標系中的  $z$  座標。

圓柱到直角 (*Cylindrical to rectangular*):

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

直角到圓柱 (*Rectangular to cylindrical*):

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z$$

## 11.7.2 球座標

**Definition 11.5** (球座標系統). 在球面座標系統 (*spherical coordinate system*) 中, 點  $P$  的座標是  $(\rho, \theta, \phi)$  的意義如下

1.  $\rho$  是  $P$  到原點的距離,  $\rho \geq 0$ 。
2.  $\theta$  是在柱座標時所用的角度, 亦即  $\theta$  是  $P$  點投影到  $xy$ -平面, 考量極座標時的角度 (可以差上偶數個  $\pi$ )。
3.  $\phi$  是  $z$  軸正向和  $\overrightarrow{OP}$  的夾角,  $0 \leq \phi \leq \pi$ 。

注意到第一和第三個座標  $\rho$  和  $\phi$  都  $\geq 0$ ,  $\rho$  是小寫希臘字母 *rho*,  $\phi$  是小寫希臘字母 *phi*。

## 1. 球座標轉直角座標:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

## 2. 直角座標轉球座標:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

3. 球座標轉柱座標 ( $r \geq 0$ ):

$$r^2 = \rho^2 \sin^2 \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

4. 柱座標轉球座標 ( $r \geq 0$ ):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right).$$

- 柱座標基本上是極座標與直角座標的綜合體, 對  $xy$ -平面的點而言, 改用極坐標  $(r, \theta)$  的方式呈現, 而  $z$  的方向保持不動。
- 球座標也是另一個常見的坐標系, 注意到這裡設定的  $\rho$  非負, 而  $\phi$  的範圍選取是介在  $0$  到  $\pi$  之間, 至於  $\theta$  與極座標的  $\theta$  概念一致。

# INDEX

- coordinate conversion 坐標轉換
  - cylindrical to rectangular 圓柱到直角, 2
  - rectangular to cylindrical 直角到圓柱, 2
- coordinate system 坐標系統
  - cylindrical 圓柱, 2
  - spherical 球面, 3
- cylinder 柱面, 1
  - directrix of 準線, 1
  - equations of 方程式, 1
  - generating curve of 母曲線, 1
  - rulings of 直紋線, 1
- cylindrical coordinate system 圓柱座標系統, 2
- cylindrical coordinates 圓柱坐標
  - converting to rectangular 轉換到直角, 2
- cylindrical surface 柱面, 1
- directrix 準線, 1
  - of a cylinder 柱面, 1
- ellipsoid 橢球面, 2
- elliptic cone 橢錐面, 2
- elliptic paraboloid 橢圓拋物面, 2
- equation(s) 方程式
  - of a cylinder 柱面, 1
- general form 一般型
  - of the equation of a quadric surface 二次曲面的方程式, 2
- generating curve of a cylinder 柱面的母曲線, 1
- generating curve 母曲線, 1
- hyperbolic paraboloid 雙曲拋物面, 2
- hyperboloid 雙曲面
  - of one sheet 單葉, 2
  - of two sheets 雙葉, 2
- quadric surface 二次曲面, 2
  - ellipsoid 橢球面, 2
  - elliptic cone 橢錐面, 2
  - elliptic paraboloid 橢圓拋物面, 2
- general form of the equation of 方程式的一般型, 2
  - hyperbolic paraboloid 雙曲拋物面, 2
  - hyperboloid of one sheet 單葉雙曲面, 2
  - hyperboloid of two sheets 雙葉雙曲面, 2
  - standard form of the equations of 方程式的標準形式, 2
- rectangular coordinates 直角坐標
  - converting to cylindrical 轉換到圓柱, 2
  - rulings of a cylinder 柱面的直紋線, 1
- spherical coordinate system 球面座標系統, 3
- standard form of the equation of 方程式的標準形式
  - a quadric surface 二次曲面, 2
- surface of revolution 旋轉曲面, 2
- surface 曲面
  - cylindrical 柱, 1
  - quadric 二次, 2
- 一般型 general form
  - 二次曲面的方程式 of the equation of a quadric surface, 2
- 二次曲面 quadric surface, 2
  - 單葉雙曲面 hyperboloid of one sheet, 2
  - 方程式的一般型 general form of the equation of, 2
  - 方程式的標準形式 standard form of the equations of, 2
  - 橢圓拋物面 elliptic paraboloid, 2
  - 橢球面 ellipsoid, 2
  - 橢錐面 elliptic cone, 2
  - 雙曲拋物面 hyperbolic paraboloid, 2
  - 雙葉雙曲面 hyperboloid of two sheets, 2
- 圓柱坐標 cylindrical coordinates
  - 轉換到直角 converting to rectangular, 2
- 圓柱座標系統 cylindrical coordinate system, 2
- 坐標系統 coordinate system
  - 圓柱 cylindrical, 2

- 球面 spherical, 3
- 坐標轉換 coordinate conversion
  - 圓柱到直角 cylindrical to rectangular, 2
  - 直角到圓柱 rectangular to cylindrical, 2
- 方程式 equation(s)
  - 柱面 of a cylinder, 1
- 方程式的標準形式 standard form of the equation of
  - 二次曲面 a quadric surface, 2
- 旋轉曲面 surface of revolution, 2
- 曲面 surface
  - 二次 quadric, 2
  - 柱 cylindrical, 1
- 柱面 cylinder, 1
  - 方程式 equations of, 1
  - 母曲線 generating curve of, 1
  - 準線 directrix of, 1
  - 直紋線 rulings of, 1
- 柱面 cylindrical surface, 1
- 柱面的母曲線 generating curve of a cylinder, 1
- 柱面的直紋線 rulings of a cylinder, 1
- 橢圓拋物面 elliptic paraboloid, 2
- 橢球面 ellipsoid, 2
- 橢錐面 elliptic cone, 2
- 母曲線 generating curve, 1
- 準線 directrix, 1
  - 柱面 of a cylinder, 1
- 球面座標系統 spherical coordinate system, 3
- 直角坐標 rectangular coordinates
  - 轉換到圓柱 converting to cylindrical, 2
- 雙曲拋物面 hyperbolic paraboloid, 2
- 雙曲面 hyperboloid
  - 單葉 of one sheet, 2
  - 雙葉 of two sheets, 2