

# CONTENTS

<b>10 圓錐曲線、參數方程和極座標</b>	<b>1</b>
10.1 圓錐曲線和微積分 (補充章節)	2
10.1.1 圓錐曲線	2
10.1.2 拋物線	2
10.1.3 橢圓	2
10.1.4 雙曲線	3
10.2 平面曲線和參數方程式	3
10.2.1 平面曲線和參數方程式	3
10.2.2 消去參數	4
10.2.3 找出參數方程式	4
10.2.4 等時曲線和降速的問題	4
10.3 參數方程式和微積分	4
10.3.1 斜率和切線	4
10.3.2 弧長	4
10.3.3 旋轉體表面積	4
10.4 極座標與極座標圖	5
10.4.1 極座標	5
10.4.2 座標轉換	5
10.4.3 極座標圖形	5
10.4.4 斜率和切線	5
10.4.5 特殊極圖	6
10.5 極座標的面積和弧長	6
10.5.1 極座標區域的面積	6
10.5.2 極座標圖形的交點	6
10.5.3 極座標的弧長形式	6
10.5.4 旋轉曲面的面積	6
<b>Index</b>	<b>7</b>



# Chapter 10

## 圓錐曲線、參數方程和極座標

### Contents

<b>10.1</b>	圓錐曲線和微積分 (補充章節)	<b>2</b>
10.1.1	圓錐曲線	2
10.1.2	拋物線	2
10.1.3	橢圓	2
10.1.4	雙曲線	3
<b>10.2</b>	平面曲線和參數方程式	<b>3</b>
10.2.1	平面曲線和參數方程式	3
10.2.2	消去參數	4
10.2.3	找出參數方程式	4
10.2.4	等時曲線和降速的問題	4
<b>10.3</b>	參數方程式和微積分	<b>4</b>
10.3.1	斜率和切線	4
10.3.2	弧長	4
10.3.3	旋轉體表面積	4
<b>10.4</b>	極座標與極座標圖	<b>5</b>
10.4.1	極座標	5
10.4.2	座標轉換	5
10.4.3	極座標圖形	5
10.4.4	斜率和切線	5
10.4.5	特殊極圖	6
<b>10.5</b>	極座標的面積和弧長	<b>6</b>
10.5.1	極座標區域的面積	6
10.5.2	極座標圖形的交點	6
10.5.3	極座標的弧長形式	6
10.5.4	旋轉曲面的面積	6

## 10.1 圓錐曲線和微積分 (補充章節)

### 10.1.1 圓錐曲線

#### 10.1.2 拋物線

**Theorem 10.1** (拋物線的標準式). 拋物線標準式 (*standard form*) 包含頂點  $(h, k)$  和準線  $y = k - p$  如下

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \text{縱軸}$$

而準線  $x = h - p$  的準線方程式為

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{橫軸}$$

而頂點對軸移動  $p$  單位 (定向的距離)。焦點的座標如下。

$$(h, k + p) \quad \text{縱軸} \qquad (h + p, k) \quad \text{橫軸}$$

**Theorem 10.2** (拋物線的反射性). 設  $P$  是拋物線上的點，且準線到  $P$  點的距離會等價於下列兩個條件。

1.  $P$  點到焦點的距離。
2. 此通過  $P$  點的線段會平行於對稱軸。

#### 10.1.3 橢圓

**Theorem 10.3** (橢圓方程式的標準式). 橢圓中心是  $(h, k)$  和長軸長是  $2a$ 、短軸長是  $2b$ ，其中  $a > b$  的橢圓標準式是

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{長軸是水平}$$

or

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{長軸是鉛直}$$

其中焦點會在長軸上，而距離橢圓中心是  $c$  單位，並且有  $c^2 = a^2 - b^2$  關係。

**Theorem 10.4** (橢圓的反射性質). 假設  $P$  是橢圓上的動點，而通過  $P$  點的切線與  $P$  點和焦點的連線上所形成的兩夾角相等。

**Definition 10.1** (橢圓的離心率). 橢圓的離心率 (*eccentricity*)  $e$  有以下的比率關係

$$e = \frac{c}{a}$$

## 10.1.4 雙曲線

**Theorem 10.5** (雙曲線標準方程式 (Standard equation of a hyperbola)). 設雙曲線的中心是  $(h, k)$ , 則雙曲線標準式為

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{貫軸是水平}$$

or

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{貫軸是鉛直}$$

頂點與中心距離  $a$  單位, 和中心與焦點距離  $c$  單位, 且其中  $c^2 = a^2 + b^2$ 。

**Theorem 10.6** (雙曲線的漸近線). 對於水平貫軸 (horizontal transverse axis) 的雙曲線方程式之漸近線為

$$y = k + \frac{b}{a}(x-h) \quad \text{和} \quad y = k - \frac{b}{a}(x-h)$$

對於垂直貫軸 (vertical transverse axis) 的雙曲線方程式之漸近線為

$$y = k + \frac{a}{b}(x-h) \quad \text{和} \quad y = k - \frac{a}{b}(x-h)$$

**Definition 10.2** (雙曲線的離心率). 雙曲線的離心率 (eccentricity)  $e$  的關係式如下

$$e = \frac{c}{a}$$

## 10.2 平面曲線和參數方程式

□ 這章開始我們要引入除了  $x$  和  $y$  以外的第三的變數了!

□ 將曲線用參數式的方法表達是從歐拉那個時候開始的, 起初是把  $t$  想成時間, 而曲線視為質點隨時間變化時運動的軌跡。不過後來  $t$  不見得要和時間對應, 它就只是一個參數 (實數軸上的一個變數) 而已。

## 10.2.1 平面曲線和參數方程式

**Definition 10.3** (平面曲線). 如果  $f$  和  $g$  皆是在區間  $I$  上  $t$  的連續函數, 則方程式為

$$x = f(t) \quad \text{和} \quad y = g(t)$$

稱為 參數方程式 (parametric equations) 且  $t$  稱為 參數 (parameter)。由  $t$  在區間  $I$  上變化中的點集合  $(x, y)$  被稱為參數方程式的曲線圖 (graph)。結合上述, 參數方程式和曲線圖稱為平面曲線, 由  $C$  來表示。

## 10.2.2 消去參數

## 10.2.3 找出參數方程式

**Definition 10.4** (平滑曲線 (Smooth curve)). 一個曲線  $C$  由  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  在區間  $I$  所組成，且  $f'$  與  $g'$  皆在  $I$  上連續，除了可能在  $I$  的端點為 0，其餘皆不同時為 0 時，我們稱為平滑 (smooth)。若此曲線在區間  $I$  上一些子區間平滑時，我們稱它片段平滑 (piecewise smooth)。

## 10.2.4 等時曲線和降速的問題

## 10.3 參數方程式和微積分

## 10.3.1 斜率和切線

**Theorem 10.7** (微分的參數式). 如果一個曲線  $C$  是由方程式  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  組成，則  $C$  的斜率在  $(x, y)$  上是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

**Remark:** 當  $t = t_0$  時，如果  $dy/dt = 0$  和  $dx/dt \neq 0$ ，則曲線代表  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  在  $(f(t_0), g(t_0))$  時有一條水平切線。然而，當  $t = t_0$  時，如果  $dx/dt = 0$  和  $dy/dt \neq 0$ ，則曲線代表  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  在  $(f(t_0), g(t_0))$  時有一條鉛直切線。

## 10.3.2 弧長

**Theorem 10.8** (弧長參數形式). 如果一個曲線  $C$  是由  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  所組成，使得  $C$  本身在區間  $a \leq t \leq b$  不相交 (除了可能在端點)。則在區間下  $C$  的弧長如下

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

## 10.3.3 旋轉體表面積

**Theorem 10.9** (旋轉體表面積). 如果一個曲線  $C$  是由  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  所組成，且  $a \leq t \leq b$ ，而形成表面積的  $S$  是由旋轉  $C$  的坐標軸來決定如下

$$1. S = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{旋轉於 } x\text{-軸} : g(t) \geq 0$$

$$2. S = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{旋轉於 } y\text{-軸} : f(t) \geq 0$$

**參數式圖形下的面積** 我們知道，從  $a$  到  $b$ ，曲線  $y = F(x)$  與  $x$  軸之間的面積為

$$A = \int_a^b F(x) dx,$$

其中  $F(x) \geq 0$ 。

如果這條曲線可以由參數方程式

$$x = f(t) \quad \text{以及} \quad y = g(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

描繪一次，則我們可以利用定積分的變數代換法，計算其面積公式如下：

$$A = \int_a^b y \, dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t) \, dt$$

## 10.4 極座標與極座標圖

□ 極座標是改用極點到點的有向距離  $r$  以及角  $\theta$  這兩個數字表達點的位置。注意到這裡的  $r$  可正可負，而極座標是一個多值的對應關係。

□ 例如  $(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$ ，而  $(r, \theta) = (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$ 。

### 10.4.1 極座標

### 10.4.2 座標轉換

**Theorem 10.10** (極座標轉換到矩形). 極座標的點  $(r, \theta)$  與直角坐標點  $(x, y)$  的關係如下  
 1.  $x = r \cos \theta$  和  $y = r \sin \theta$     2.  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  和  $r^2 = x^2 + y^2$

### 10.4.3 極座標圖形

### 10.4.4 斜率和切線

**Theorem 10.11** (極座標的斜率). 如果  $f$  是  $\theta$  可微的函數，而  $r = f(\theta)$  的圖形之切線的斜率在點  $(r, \theta)$  上是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

但在  $(r, \theta)$  上  $dx/d\theta \neq 0$ 。(看圖 10.1。)

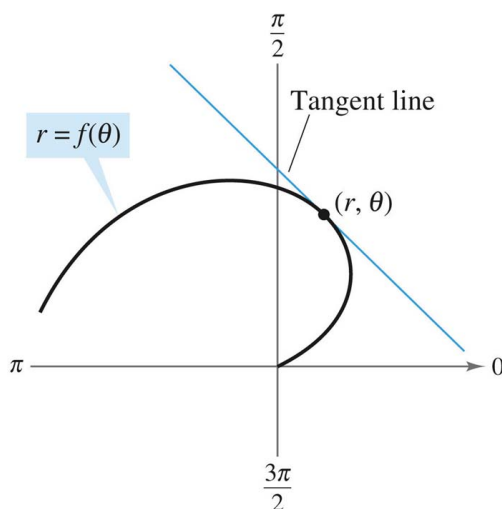


Figure 10.1: 曲線  $r = f(\theta)$  上的切線。

**Theorem 10.12** (極座標上的切線). 如果  $f(\alpha) = 0$  和  $f'(\alpha) \neq 0$ , 則極座標圖形  $r = f(\theta)$  的切線是  $\theta = \alpha$ .

### 10.4.5 特殊極圖

- 善用圖形的對稱性還有方程式的平移縮放旋轉可以幫助我們把一些曲線做連結。
- 可利用數學繪圖軟體幫忙思考 <https://www.geogebra.org/m/rYvqZqBs>。

## 10.5 極座標的面積和弧長

### 10.5.1 極座標區域的面積

**Theorem 10.13** (極座標面積). 如果  $f$  在區間  $[\alpha, \beta]$  是非負和連續且  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ , 則極座標面積  $r = f(\theta)$  的邊界區域面積介於  $\theta = \alpha$  和  $\theta = \beta$  如下

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta, \quad 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$$

- 當區域是由兩個極坐標方程式圍住時, 其區域面積也可以寫出, 基本上就是大扇形面積減掉小扇形面積的概念。

### 10.5.2 極座標圖形的交點

### 10.5.3 極座標的弧長形式

**Theorem 10.14** (極座標的曲線弧長). 令  $f$  在區間  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  上是一個可微且連續的函數。圖形  $r = f(\theta)$  介於  $\theta = \alpha$  和  $\theta = \beta$  之間的弧長為

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

### 10.5.4 旋轉曲面的面積

**Theorem 10.15** (旋轉曲面的面積). 令  $f$  在區間  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  上是一個可微且連續的函數。圖形  $r = f(\theta)$  在指定的軸上旋轉且介於  $\theta = \alpha$  和  $\theta = \beta$  之間的旋轉曲面面積如下

1.  $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \sin \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$       對於極軸
2.  $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$       對於  $\theta = \frac{\pi}{2}$



# INDEX

- arc length 弧長
  - in parametric form 參數形式, 4
  - of a polar curve 極座標曲線, 6
- area 面積
  - in polar coordinates 極座標, 6
  - of a surface of revolution 旋轉曲面
    - in parametric form 參數型式, 4
    - in polar coordinates 極座標, 6
- asymptote(s) 漸近
  - of a hyperbola 雙曲線, 3
- axis 軸
  - of a parabola 拋物線, 2
- conic 圓錐曲線
  - parabola 拋物線, 2
- coordinate conversion 坐標轉換
  - polar to rectangular 極座標到矩形, 5
  - rectangular to polar 長方形到極座標, 5
- coordinates, polar 坐標, 極
  - area in 面積, 6
  - area of a surface of revolution in 旋轉曲面面積, 6
  - converting to rectangular 極坐標到矩形, 5
- coordinates, rectangular, converting to polar 轉換到極坐標, 矩形, 5
- curve 曲線
  - piecewise smooth 分段平滑, 4
  - plane 平面, 3
  - smooth 平滑, 4
    - piecewise 分段, 4
- derivative(s) 導數
  - parametric form 參數形式, 4
- directrix 準線
  - of a parabola 拋物線, 2
- eccentricity 離心率
  - of a hyperbola 雙曲線, 3
  - of an ellipse 橢圓, 2
- ellipse 橢圓
  - eccentricity of 離心率, 2
  - reflective property of 反射性, 2
  - standard equation of 標準方程式, 2
- equation(s) 方程式
  - of a hyperbola 雙曲線, 3
  - of a parabola 拋物線, 2
  - of an ellipse 橢圓, 2
  - parametric 參數, 3
    - graph of 圖, 3
- famous curves 著名曲線
  - parabola 拋物線, 2
- focus 焦點
  - of a parabola 拋物線, 2
- graph(s) 圖
  - of parametric equations 參數方程式, 3
  - polar 極
    - points of intersection 交點, 6
- hyperbola 雙曲線
  - asymptotes of 漸近線, 3
  - eccentricity of 離心率, 3
  - standard equation of 標準方程式, 3
- length 長度
  - of an arc 弧長
    - parametric form 參數形式, 4
    - polar form 極式, 6
- line(s) 直線
  - tangent 切線
    - at the pole 極, 6
- parabola 拋物線, 2
  - axis of 軸, 2
  - directrix of 準線, 2
  - focus of 焦點, 2
  - reflective property of 反射性, 2
  - standard equation of 標準方程式, 2
  - vertex of 頂點, 2
- parameter 參數, 3
- parametric equations 參數方程式, 3

- graph of 圖, 3
- parametric form 參數形式
  - of arc length 弧長, 4
  - of the area of a surface of revolution 旋轉體面積, 4
  - of the derivative 導數, 4
- piecewise smooth curve 分段平滑的曲線, 4
- point 點
  - of intersection 交點
    - of polar graphs 極座標圖形, 6
- polar coordinates 極座標
  - area in 面積, 6
  - area of a surface of revolution in 旋轉曲面面積, 6
  - converting to rectangular 極坐標到矩形, 5
- polar curve, arc length of 極座標曲線, 弧形長度, 6
- polar form of slope 極座標形式的斜率, 5
- polar graphs 極座標圖形
  - points of intersection 交點, 6
- pole 極
  - tangent lines at 切線, 6
- rectangular coordinates 直角坐標
  - converting to polar 轉換到極坐標, 5
- reflective property 反射性
  - of a parabola 拋物線, 2
  - of an ellipse 橢圓, 2
- revolution 旋轉
  - surface of 表面積
    - area of 面積, 4, 6
- slope(s) 斜率
  - of a tangent line 切線
    - parametric form 參數形式, 4
    - polar form 極式, 5
- smooth 平滑
  - curve 曲線, 4
    - piecewise 分段, 4
- standard equation of 標準方程式
  - a hyperbola 雙曲線, 3
  - a parabola 拋物線, 2
  - an ellipse 橢圓, 2
- standard form of the equation of 方程式的標準形式
  - a hyperbola 雙曲線, 3
  - a parabola 拋物線, 2
  - an ellipse 橢圓, 2
- surface of revolution 旋轉體表面積
  - area of 面積
    - parametric form 參數形式, 4
    - polar form 極式, 6
- tangent line(s) 切線
  - at the pole 極, 6
  - slope of 斜率
    - parametric form 參數形式, 4
    - polar form 極式, 5
- vertex 頂點
  - of a parabola 拋物線, 2
- 分段平滑的曲線 piecewise smooth curve, 4
- 切線 tangent line(s)
  - 斜率 slope of
    - 參數形式 parametric form, 4
    - 極式 polar form, 5
  - 極 at the pole, 6
- 參數 parameter, 3
- 參數形式 parametric form
  - 導數 of the derivative, 4
  - 弧長 of arc length, 4
  - 旋轉體面積 of the area of a surface of revolution, 4
- 參數方程式 parametric equations, 3
  - 圖 graph of, 3
- 反射性 reflective property
  - 拋物線 of a parabola, 2
  - 橢圓 of an ellipse, 2
- 圓錐曲線 conic
  - 拋物線 parabola, 2
- 圖 graph(s)
  - 參數方程式 of parametric equations, 3
  - 極 polar
    - 交點 points of intersection, 6
- 坐標轉換 coordinate conversion
  - 極座標到矩形 polar to rectangular, 5
  - 長方形到極座標 rectangular to polar, 5
- 坐標, 極 coordinates, polar
  - 旋轉曲面面積 area of a surface of revolution in, 6
  - 極坐標到矩形 converting to rectangular, 5
  - 面積 area in, 6
- 導數 derivative(s)
  - 參數形式 parametric form, 4
- 平滑 smooth
  - 曲線 curve, 4
    - 分段 piecewise, 4
- 弧長 arc length
  - 參數形式 in parametric form, 4

- 極座標曲線 of a polar curve, 6
- 拋物線 parabola, 2
  - 反射性 reflective property of, 2
  - 標準方程式 standard equation of, 2
  - 準線 directrix of, 2
  - 焦點 focus of, 2
  - 軸 axis of, 2
  - 頂點 vertex of, 2
- 斜率 slope(s)
  - 切線 of a tangent line
    - 參數形式 parametric form, 4
    - 極式 polar form, 5
- 方程式 equation(s)
  - 參數 parametric, 3
  - 圖 graph of, 3
  - 拋物線 of a parabola, 2
  - 橢圓 of an ellipse, 2
  - 雙曲線 of a hyperbola, 3
- 方程式的標準形式 standard form of the equation of
  - 拋物線 a parabola, 2
  - 橢圓 an ellipse, 2
  - 雙曲線 a hyperbola, 3
- 旋轉 revolution
  - 表面積 surface of
    - 面積 area of, 4, 6
- 旋轉體表面積 surface of revolution
  - 面積 area of
    - 參數形式 parametric form, 4
    - 極式 polar form, 6
- 曲線 curve
  - 分段平滑 piecewise smooth, 4
  - 平滑 smooth, 4
    - 分段 piecewise, 4
  - 平面 plane, 3
- 極 pole
  - 切線 tangent lines at, 6
- 極座標 polar coordinates
  - 旋轉曲面面積 area of a surface of revolution in, 6
  - 極坐標到矩形 converting to rectangular, 5
  - 面積 area in, 6
- 極座標圖形 polar graphs
  - 交點 points of intersection, 6
- 極座標形式的斜率 polar form of slope, 5
- 極座標曲線, 弧形長度 polar curve, arc length of, 6
- 標準方程式 standard equation of
  - 拋物線 a parabola, 2
  - 橢圓 an ellipse, 2
  - 雙曲線 a hyperbola, 3
- 橢圓 ellipse
  - 反射性 reflective property of, 2
  - 標準方程式 standard equation of, 2
  - 離心率 eccentricity of, 2
- 準線 directrix
  - 拋物線 of a parabola, 2
- 漸近 asymptote(s)
  - 雙曲線 of a hyperbola, 3
- 焦點 focus
  - 拋物線 of a parabola, 2
- 直線 line(s)
  - 切線 tangent
    - 極 at the pole, 6
- 直角坐標 rectangular coordinates
  - 轉換到極坐標 converting to polar, 5
- 著名曲線 famous curves
  - 拋物線 parabola, 2
- 軸 axis
  - 拋物線 of a parabola, 2
- 轉換到極坐標, 矩形 coordinates, rectangular, converting to polar, 5
- 長度 length
  - 弧長 of an arc
    - 參數形式 parametric form, 4
    - 極式 polar form, 6
- 雙曲線 hyperbola
  - 標準方程式 standard equation of, 3
  - 漸近線 asymptotes of, 3
  - 離心率 eccentricity of, 3
- 離心率 eccentricity
  - 橢圓 of an ellipse, 2
  - 雙曲線 of a hyperbola, 3
- 面積 area
  - 旋轉曲面 of a surface of revolution
    - 參數型式 in parametric form, 4
    - 極座標 in polar coordinates, 6
    - 極座標 in polar coordinates, 6
- 頂點 vertex
  - 拋物線 of a parabola, 2
- 點 point
  - 交點 of intersection
    - 極座標圖形 of polar graphs, 6