

1. 計算此重積分。

$$\int_0^2 \int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y \, dx \, dy$$

解答：

首先，對 x 進行積分：

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y \, dx \, dy &= \int_0^2 \left[3yx \right]_{x=3y^2-6y}^{x=2y-y^2} dy \\ &= \int_0^2 3y \left((2y-y^2) - (3y^2-6y) \right) dy \\ &= \int_0^2 3y (-4y^2 + 8y) dy \\ &= \int_0^2 (-12y^3 + 24y^2) dy \end{aligned}$$

接著，對 y 進行積分：

$$\begin{aligned} \int_0^2 (-12y^3 + 24y^2) dy &= [-3y^4 + 8y^3]_0^2 \\ &= (-3(2)^4 + 8(2)^3) - 0 \\ &= -48 + 64 \\ &= 16 \end{aligned}$$

2. 計算此重積分。

$$\int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} dy \, dx$$

解答：

由於積分上下界皆為常數，且被積函數可以分離為 x 的函數與 y 的函數相乘，我們可以將積分拆開獨立計算：

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} dy \, dx &= \left(\int_0^4 \frac{1}{x+1} dx \right) \left(\int_0^2 \frac{1}{y+1} dy \right) \\ &= \left[\ln|x+1| \right]_0^4 \left[\ln|y+1| \right]_0^2 \\ &= (\ln 5 - \ln 1)(\ln 3 - \ln 1) \\ &= (\ln 5)(\ln 3) \end{aligned}$$

3. 將此重積分轉換為極座標來進行計算。

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x \, dy \, dx$$

解答：

積分區域 D 的範圍為 $0 \leq x \leq 2$ 且 $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ 。這意味著 $y^2 \leq 4-x^2$ ，即 $x^2 + y^2 \leq 4$ 。根據這些邊界條件， D 為位於第一象限中，半徑為 2 的四分之一圓。在極座標中，此區域可表示為：

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

代入 $x = r \cos \theta$ 以及 $dy dx = r dr d\theta$ ，積分式變為：

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (r \cos \theta) r dr d\theta \\&= \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^2 r^2 dr \\&= \left[\sin \theta \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 \\&= (\sin(\pi/2) - \sin 0) \left(\frac{2^3}{3} - 0 \right) \\&= (1) \left(\frac{8}{3} \right) \\&= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

第二題

計算下列重積分：

$$\int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} dy dx$$

先對 y 積分：

$$= \int_0^4 \frac{1}{x+1} \left(\int_0^2 \frac{1}{y+1} dy \right) dx$$

計算內積分：

$$\int_0^2 \frac{1}{y+1} dy = [\ln |y+1|]_0^2$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

因此原式變成：

$$= \int_0^4 \frac{\ln 3}{x+1} dx$$

將常數提出：

$$= \ln 3 \int_0^4 \frac{1}{x+1} dx$$

接著計算外積分：

$$= \ln 3 [\ln |x+1|]_0^4$$

$$= \ln 3 (\ln 5 - \ln 1)$$

$$= \ln 3 \ln 5$$

因此此重積分的值為：

$$\boxed{\ln 3 \ln 5}$$

第三題

利用極座標計算下列重積分：

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x \, dy \, dx$$

Step 1：描述積分區域

由積分範圍可知：

$$0 \leq x \leq 2$$

且

$$0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

將上式平方得：

$$y^2 = 4 - x^2$$

整理可得：

$$x^2 + y^2 = 4$$

因此積分區域為半徑 2 的圓在第一象限的部分。

轉換成極座標：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Jacobian 為：

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

第一象限的角度範圍：

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

半徑範圍：

$$0 \leq r \leq 2$$

Step 2：轉換被積函數

因為

$$x = r \cos \theta$$

所以原積分變成：

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (r \cos \theta)(r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Step 3：計算積分

先對 r 積分：

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left(\frac{8}{3} \right) d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{8}{3} [\sin \theta]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{8}{3} (1 - 0) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

因此此重積分的值為：

$$\boxed{\frac{8}{3}}$$