

題目 1 解答：

求函數 $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$ 在點 $P(3, 0)$ 沿著 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 夾角方向之單位向量 $\mathbf{u}$ 的方向導數。

解答：

首先，計算函數 $f(x, y)$ 對 x 與 y 的偏導數：

$$f_x(x, y) = \frac{0 \cdot (x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-y}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1 \cdot (x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2}$$

接著，將點 $P(3, 0)$ 代入，求得在該點的梯度 $\nabla f(3, 0)$ ：

$$f_x(3, 0) = \frac{-0}{(3+0)^2} = 0$$

$$f_y(3, 0) = \frac{3}{(3+0)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

因此，梯度向量為 $\nabla f(3, 0) = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$ 。

根據題目給定的角度 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，可以寫出方向單位向量 $\mathbf{u}$ ：

$$\mathbf{u} = \left\langle \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

最後，計算梯度與單位向量的內積，即可得到方向導數：

$$D_{\mathbf{u}}f(3, 0) = \nabla f(3, 0) \cdot \mathbf{u} = \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$$

答案：該方向導數為 $\frac{1}{6}$ 。

題目 2 解答：

求曲面 $x^2y^3 - y^2z + 2xz^3 = 4$ 在給定點 $(-1, 1, -1)$ 的單位法向量 (Unit Normal Vector)。

解答：

首先，令曲面函數為 $F(x, y, z) = x^2y^3 - y^2z + 2xz^3$ 。

為了求出法向量，我們需要計算函數對 x, y, z 的偏導數以得到梯度向量 ∇F ：

$$F_x(x, y, z) = 2xy^3 + 2z^3$$

$$F_y(x, y, z) = 3x^2y^2 - 2yz$$

$$F_z(x, y, z) = -y^2 + 6xz^2$$

接著，將題目給定的點 $(-1, 1, -1)$ 代入這些偏導數中：

$$F_x(-1, 1, -1) = 2(-1)(1)^3 + 2(-1)^3 = -2 - 2 = -4$$

$$F_y(-1, 1, -1) = 3(-1)^2(1)^2 - 2(1)(-1) = 3(1)(1) + 2 = 5$$

$$F_z(-1, 1, -1) = -(1)^2 + 6(-1)(-1)^2 = -1 - 6 = -7$$

因此，在該點的法向量（即梯度）為 $\nabla F(-1, 1, -1) = \langle -4, 5, -7 \rangle$ 。

下一步，計算此梯度向量的長度 (Magnitude)：

$$|\nabla F| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 25 + 49} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

最後，將法向量除以其長度進行單位化，即可求得單位法向量 $\mathbf{n}$ ：

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{3\sqrt{10}} \langle -4, 5, -7 \rangle = \left\langle \frac{-4}{3\sqrt{10}}, \frac{5}{3\sqrt{10}}, \frac{-7}{3\sqrt{10}} \right\rangle$$

答案：單位法向量為 $\left\langle \frac{-4}{3\sqrt{10}}, \frac{5}{3\sqrt{10}}, \frac{-7}{3\sqrt{10}} \right\rangle$ 。

題目 3：

求函數 $z = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$ 的所有相對極值與鞍點。若適用，請使用二次偏導數檢定法 (Second Partials Test)。

解答：

首先，計算函數 z 對 x 與 y 的一階偏導數，並令其為 0 以尋找臨界點 (Critical Points)：

$$z_x = -10x + 4y + 16 = 0$$

$$z_y = 4x - 2y = 0$$

由第二式可得 $2y = 4x$ ，即 $y = 2x$ 。將 $y = 2x$ 代入第一式中：

$$-10x + 4(2x) + 16 = 0$$

$$-10x + 8x + 16 = 0$$

$$-2x = -16 \Rightarrow x = 8$$

將 $x = 8$ 代回 $y = 2x$ ，得到 $y = 16$ 。因此，我們得到唯一的臨界點 $(8, 16)$ 。

接著，計算二階偏導數以進行檢定：

$$z_{xx} = -10$$

$$z_{yy} = -2$$

$$z_{xy} = 4$$

計算判別式 (Discriminant) D ：

$$D = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 = (-10)(-2) - (4)^2 = 20 - 16 = 4$$

最後，在臨界點 $(8, 16)$ 上檢驗極值性質：因為 $D = 4 > 0$ 且 $z_{xx} = -10 < 0$ ，根據二次偏導數檢定法，函數在該點發生**相對極大值** (Relative Maximum)。

將臨界點代回原函數求得極大值：

$$z(8, 16) = -5(8)^2 + 4(8)(16) - (16)^2 + 16(8) + 10 = -320 + 512 - 256 + 128 + 10 = 74$$

答案：在點 $(8, 16)$ 有相對極大值 74，無鞍點。