第 1 題解答

題目：求函數

$$z = \ln \sqrt{xy}$$

的兩個一階偏導數。

解答

首先將函數化簡：

$$z = \ln \sqrt{xy} = \ln(xy)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(xy)$$

再利用對數性質：

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

因此

$$z = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y)$$

對 x 的偏導數

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

對 y 的偏導數

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2y}$$

最終答案

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y}}$$

第 2 題解答

題目：求函數

$$z = 2x^3y - 8xy^4$$

的全微分（total differential）。

解答

全微分公式為：

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

計算對 x 的偏導數

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y - 8xy^4) = 6x^2y - 8y^4$$

計算對 y 的偏導數

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y - 8xy^4) = 2x^3 - 32xy^3$$

寫出全微分

$$dz = (6x^2y - 8y^4)\,dx + (2x^3 - 32xy^3)\,dy$$

最終答案

$$\boxed{dz = (6x^2y - 8y^4)\,dx + (2x^3 - 32xy^3)\,dy}$$

第 3 題解答（修正）

題目：利用不同方法求 $\frac{dw}{dt}$：

$$w = \cos(x-y), \quad x = t^2, \quad y = 1$$

(a) 使用鏈鎖律（Chain Rule）

由鏈鎖律可得：

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

先計算偏導數：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\sin(x-y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin(x-y)$$

再計算：

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

代入得：

$$\frac{dw}{dt} = (-\sin(x-y))(2t) + (\sin(x-y))(0)$$

整理：

$$\frac{dw}{dt} = -2t\sin(x-y)$$

代回 $x = t^2, y = 1$：

$$\frac{dw}{dt} = -2t\sin(t^2-1)$$

(b) 先將 w 表成 t 的函數再微分

先代入：

$$w = \cos(t^2-1)$$

直接對 t 微分：

$$\frac{dw}{dt} = -\sin(t^2-1)\cdot\frac{d}{dt}(t^2-1)$$

計算內部導數：

$$\frac{d}{dt}(t^2-1) = 2t$$

因此：

$$\frac{dw}{dt} = -2t\sin(t^2-1)$$

最終答案

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = -2t\sin(t^2-1)}$$