Problem 1: Find $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}(t_0)$, and $\mathbf{r}'(t_0)$ for $\mathbf{r}(t) = 3\sin t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j}$ with $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Then sketch the curve represented by the vector-valued function and sketch the vectors $\mathbf{r}(t_0)$ and $\mathbf{r}'(t_0)$.

Solution:

首先，給定向量函數：

$$\mathbf{r}(t) = 3\sin t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j}$$

計算其導函數 $\mathbf{r}'(t)$：

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}(3\sin t)\,\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(4\cos t)\,\mathbf{j} = 3\cos t\,\mathbf{i} - 4\sin t\,\mathbf{j}$$

接著，代入 $t_0 = \frac{\pi}{2}$ 來求 $\mathbf{r}(t_0)$：

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} = 3(1)\mathbf{i} + 4(0)\mathbf{j} = 3\mathbf{i}$$

再代入 $t_0 = \frac{\pi}{2}$ 來求 $\mathbf{r}'(t_0)$：

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} = 3(0)\mathbf{i} - 4(1)\mathbf{j} = -4\mathbf{j}$$

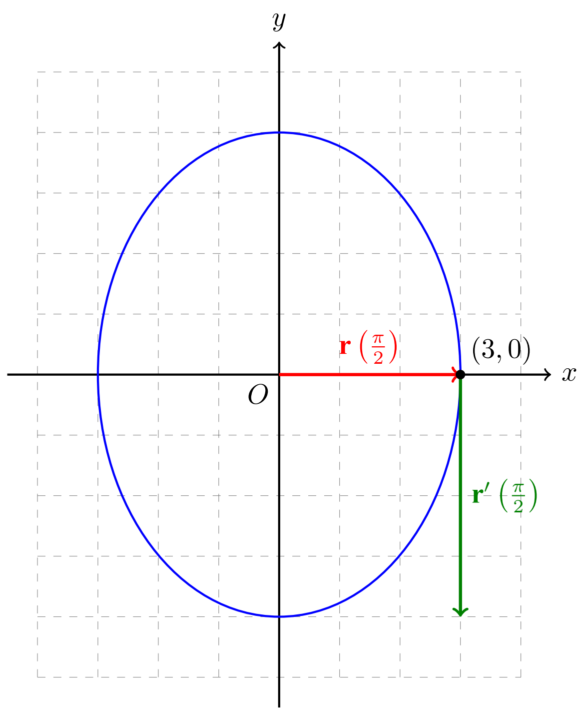
曲線與向量草圖說明：

該向量函數的參數方程式為 $x = 3\sin t$ 與 $y = 4\cos t$。利用三角恆等式 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$，可得：

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \implies \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

這是一個中心在原點 $(0,0)$ 的橢圓，長軸在 y 軸上（頂點為 ± 4），短軸在 x 軸上（頂點為 ± 3）。值得注意的是，當 t 從 0 增加時，軌跡是從 $(0,4)$ 開始依順時針方向移動。

當 $t = \frac{\pi}{2}$ 時，位置向量為 $(3,0)$，而切線向量（速度向量）為向下指的 $(0,-4)$。圖形如下所示：



Problem 2: Find the domain and range of the function $f(x,y) = e^{xy}$.

Solution:

1. 定義域 (Domain):

給定函數為 $f(x,y) = e^{xy}$。首先，指數函數的次方部分是一個雙變數多項式 $u(x,y) = xy$。多項式對於所有實數對 (x,y) 都有定義。其次，自然指數函數 e^u 的定義域為所有實數 $u \in \mathbb{R}$。因此，函數 $f(x,y)$ 在整個二維實數空間中皆有定義。其定義域 (Domain, D) 為：

$$D = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2. 值域 (Range):

為了找出值域，我們可以先觀察指數的次方 $u = xy$ 的可能範圍。因為 x 和 y 可以是任意實數，所以它們的乘積 $u = xy$ 也可以是任意實數，即 $u \in (-\infty, \infty)$。對於任意實數 u，自然指數函數 e^u 的值恆為正數，且能涵蓋所有正實數。也就是說：

$$\lim_{u \to -\infty} e^u = 0 \quad \text{且} \quad \lim_{u \to \infty} e^u = \infty$$

因此，函數 $f(x,y) = e^{xy}$ 的值域 (Range, R) 為所有正實數：

$$R = (0, \infty) \quad \text{或寫作} \quad \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$$

Problem 3: Find the limit and discuss the continuity of the function

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Solution:

1. 求極限 (Finding the Limit):

給定的函數為有理函數 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$。我們要求當 $(x,y) \to (1,1)$ 時的極限。首先檢查分母在極限點 $(1,1)$ 的值：

$$x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 0$$

因為分母不為零，且多項式函數在實數空間中皆連續，所以我們可以使用直接代入法（Direct Substitution）來求得此有理函數的極限：

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{(1)(1)}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$$

2. 討論連續性 (Discussing Continuity):

根據定義，雙變數函數 $f(x,y)$ 在點 (a,b) 連續，必須同時滿足以下三個條件：

1. 函數值 $f(a,b)$ 有定義。
2. 極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在。
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$。

我們來檢驗點 $(1,1)$：

- 函數在該點的值為 $f(1,1) = \frac{(1)(1)}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$，有定義。
- 如第一部分所求，極限 $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$，極限存在。
- 極限值等於函數值（兩者皆為 $\frac{1}{2}$）。

結論：

由於有理函數在其分母不為零的區域內處處連續，而 $x^2 + y^2 = 0$ 僅在原點 $(0,0)$ 發生。因此，函數 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 在網域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上皆為連續。由於點 $(1,1)$ 包含在這個連續區域內，所以該函數在點 $(1,1)$ 是連續的。

□ **助教點評 (TA Note):**

在計算多變數極限時，務必先確認「極限點」為何。本題常被誤認為是 $(x,y) \to (0,0)$ 的經典不連續題型（可利用沿 $y = mx$ 路徑逼近證明極限不存在），但本題的極限點為 $(1,1)$，不可混淆。