題目：求不定積分 $\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

解答：

此題可利用三角代換法 (Trigonometric Substitution)。因為根號內為 $16-x^2$，可令

$$x = 4\sin\theta$$

則

$$dx = 4\cos\theta\,d\theta$$

並且

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-16\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{16(1-\sin^2\theta)}\\ &= \sqrt{16\cos^2\theta}\\ &= 4\cos\theta\end{aligned}$$

現在將上述結果代入原積分式中：

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx &= \int \frac{4}{(4\sin\theta)^2(4\cos\theta)}(4\cos\theta)\,d\theta\\ &= \int \frac{4}{16\sin^2\theta\cdot 4\cos\theta}(4\cos\theta)\,d\theta\\ &= \int \frac{1}{4\sin^2\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\,d\theta\\ &= -\frac{1}{4}\cot\theta + C\end{aligned}$$

接著將 θ 換回 x。由 $x = 4\sin\theta$ 可得

$$\sin\theta = \frac{x}{4}$$

因此

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

故

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

最後代回原式，可得

$$\int \frac{4}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{4x} + C$$

其中 C 為積分常數。

題目：求不定積分 $\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx$

解答：
此題可使用部分分式分解法。
因為分母為重根 $(x-2)^2$，故先設

$$\frac{5x-2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

兩邊同乘 $(x-2)^2$，可得

$$5x-2 = A(x-2) + B$$

將右式展開：

$$5x-2 = Ax - 2A + B$$

比較左右兩邊係數，可得

$$A = 5$$

且

$$-2A + B = -2$$

將 $A=5$ 代入上式：

$$-10 + B = -2$$

所以

$$B = 8$$

因此

$$\frac{5x-2}{(x-2)^2} = \frac{5}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$$

故原積分可改寫為

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}\right) dx \\
&= 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 8\int (x-2)^{-2}\,dx \\
&= 5\ln|x-2| + 8\left(-(x-2)^{-1}\right) + C \\
&= 5\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + C
\end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx = 5\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + C$$

其中 C 為積分常數。

題目：判斷積分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$ 是否為瑕積分 (improper integral)，並說明理由。

解答：

首先判斷此積分是否為瑕積分。

被積函數為

$$\frac{1}{x^3}$$

當 x 在區間 $[1,2]$ 上時，分母 $x^3 \neq 0$，因此函數在此區間上皆有定義且為連續函數。此外，積分區間 $[1,2]$ 的上下限皆為有限數值，並沒有無窮端點。

因此，此積分在區間 $[1,2]$ 上為連續函數的定積分，故為**正常定積分 (proper integral)**，而**不是瑕積分**。

接著計算此定積分的值。

首先將被積函數改寫為冪次形式：

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

因此原積分可寫為

$$\int_1^2 x^{-3}\,dx$$

先求其不定積分：

$$\begin{aligned}\int x^{-3}\,dx &= \frac{x^{-2}}{-2} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2} + C\end{aligned}$$

接著代入積分上下限：

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x^3} &= \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2(2^2)} - \left(-\frac{1}{2(1^2)}\right) \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

因此

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{8}.$$