題目： 求不定積分 $\int t^3\sqrt{t^4+1}\,dt$

解答：

此題我們使用變數代換法 (Integration by Substitution)。

首先，觀察被積函數，令根號內的式子為 u：

$$u = t^4 + 1$$

接著對 t 微分求出 du：

$$du = 4t^3\,dt$$

移項湊出題目中原有的 $t^3\,dt$：

$$\frac{1}{4}du = t^3\,dt$$

現在，將原積分式以 u 和 du 進行替換，並進行積分計算：

$$\begin{aligned}
\int t^3\sqrt{t^4+1}\,dt &= \int \sqrt{t^4+1}\cdot(t^3\,dt) \\
&= \int \sqrt{u}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\,du \\
&= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

最後，將 $u = t^4 + 1$ 代回式子中，即可得到最終答案：

$$\int t^3\sqrt{t^4+1}\,dt = \frac{1}{6}(t^4+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

（其中 C 為積分常數）

題目：求不定積分 $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$

解答：

此題使用變數代換法 (Integration by Substitution)。

首先，觀察被積函數，令自然指數的次方部分為 u：

$$u = \frac{1}{t} = t^{-1}$$

接著對 t 微分求出 du：

$$du = -t^{-2}\,dt = -\frac{1}{t^2}\,dt$$

將負號移項，湊出題目中原有的 $\frac{1}{t^2}\,dt$：

$$-du = \frac{1}{t^2}\,dt$$

現在，將原積分式以 u 和 du 進行替換，並進行積分計算：

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt &= \int e^{1/t} \cdot \left(\frac{1}{t^2}\,dt\right) \\
&= \int e^u\,(-du) \\
&= -\int e^u\,du \\
&= -e^u + C
\end{aligned}$$

最後，將 $u = \frac{1}{t}$ 代回式子中，即可得到最終答案：

$$\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt = -e^{1/t} + C$$

（其中 C 為積分常數）

題目：求不定積分 $\int \sec^4 x\,dx$

解答：
此題我們利用三角恆等式與變數代換法。
首先，將 $\sec^4 x$ 拆解，保留一個 $\sec^2 x$ 以便後續作為 du：

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\,dx$$

利用三角恆等式 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ 替換前面的項：

$$= \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\,dx$$

接著，令 $u = \tan x$，則 $du = \sec^2 x\,dx$。代入積分式中：

$$\begin{aligned} \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\,dx &= \int (1 + u^2)\,du \\ &= u + \frac{1}{3}u^3 + C \end{aligned}$$

最後，將 $u = \tan x$ 代回式子中，即可得到最終答案：

$$\int \sec^4 x\,dx = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

（其中 C 為積分常數）