Question 1

Use the definition of Taylor series to find the Taylor series, centered at c, for the function $f(x) = e^x, c = 1$.

Solution:

根據泰勒級數（Taylor series）的定義，函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 處展開的公式為：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

已知目標函數為 $f(x) = e^x$。由於自然指數函數的各階導數皆為其自身，因此對於所有非負整數 n：

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

將中心點 $c = 1$ 代入各階導數中，可得：

$$f^{(n)}(1) = e^1 = e$$

最後，將 $c = 1$ 與 $f^{(n)}(1) = e$ 代回泰勒級數的定義公式中，即可得到 $f(x) = e^x$ 在 $c = 1$ 處的泰勒級數：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

若將其展開，前幾項的形式如下：

$$f(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Question 2

Find a power series for the function, centered at c.

$$g(x) = \frac{3}{2x-1}, \quad c = 2$$

Solution:

為了找出以 $c = 2$ 為中心的冪級數，我們需要將函數改寫成包含 $(x-2)$ 的形式。令 $u = x - 2$，這表示 $x = u + 2$。將其代入原函數 $g(x)$ 中：

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{2(u+2)-1} \\ &= \frac{3}{2u+4-1} \\ &= \frac{3}{3+2u} \end{aligned}$$

接著，我們將式子進一步變形，使其符合無窮等比級數（幾何級數）的總和公式 $\frac{a}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$：

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{3\left(1+\frac{2}{3}u\right)} \\ &= \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}u\right)} \end{aligned}$$

現在可以套用幾何級數展開，其中首項 $a = 1$，公比 $r = -\frac{2}{3}u$：

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}u\right)^n$$

最後，將 $u = x - 2$ 代回級數中，並稍微整理常數項：

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n (x-2)^n$$

此即為 $g(x)$ 在 $c = 2$ 處的冪級數表示法。（其收斂區間為 $\left|-\frac{2}{3}(x-2)\right| < 1 \implies |x-2| < \frac{3}{2}$）

Question 3

Find the Maclaurin series for the function. Use the table of power series for elementary functions on page 674.

$$g(x) = e^x \cos(x)$$

Solution:

根據題意，我們利用已知基本函數的馬克勞林級數（Maclaurin series）來求解。首先，列出 e^x 與 $\cos(x)$ 的馬克勞林級數展開式：

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

將這兩個級數相乘來求 $g(x) = e^x \cos(x)$ 的展開式。我們將兩者相乘，並收集同次方的項，計算到 x^4 為止：

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)$$

逐項展開並合併同類項：

- 常數項：$1 \cdot 1 = 1$
- x 項：$x \cdot 1 = x$
- x^2 項：$1 \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 0$
- x^3 項：$x \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{6} \cdot 1 = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} = -\frac{2x^3}{6} = -\frac{x^3}{3}$
- x^4 項：$1 \cdot \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^4}{24} \cdot 1 = \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} = \frac{2x^4}{24} - \frac{6x^4}{24} = -\frac{x^4}{6}$

將上述結果組合，即可得到 $g(x)$ 的馬克勞林級數前幾項：

$$e^x \cos(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \dots$$