1 Determine whether the improper integral diverges or converges. Evaluate the integral if it converges.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

解答：

首先利用變數代換法，令 $u = 1 + e^x$，則 $du = e^x dx$。當下界 $x = 0$ 時，$u = 2$；當上界 $x \to \infty$ 時，$u \to \infty$。將原式寫成極限形式為：

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

變數變換後得到：

$$\lim_{t\to\infty} \int_2^{1+e^t} \frac{1}{u}du$$

計算反導數得 $\ln|u|$，代入上下界後為：

$$\lim_{t\to\infty} (\ln(1+e^t) - \ln(2))$$

因為當 $t \to \infty$ 時，$1 + e^t \to \infty$，其自然對數也趨近於無限大，故極限值為無限大，此瑕積分發散。

2 Find the nth Taylor polynomial for the function, centered on c.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, n = 4, c = -2.$$

解答：根據公式：

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(-2)}{k!}(x+2)^k$$

我們需要計算函數到第四階的導數並代入 $x = -2$。原函數為 $f(x) = x^{-2}$，代入得 $f(-2) = \frac{1}{4}$。一階導數為 $f'(x) = -2x^{-3}$，代入得 $f'(-2) = \frac{1}{4}$。二階導數為 $f''(x) = 6x^{-4}$，代入得 $f''(-2) = \frac{3}{8}$。三階導數為 $f'''(x) = -24x^{-5}$，代入得 $f'''(-2) = \frac{3}{4}$。四階導數為 $f^{(4)}(x) = 120x^{-6}$，代入得 $f^{(4)}(-2) = \frac{15}{8}$。將這些數值代入泰勒多項式公式並除以對應的階乘，得到：

$$P_4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1/4}{1!}(x+2) + \frac{3/8}{2!}(x+2)^2 + \frac{3/4}{3!}(x+2)^3 + \frac{15/8}{4!}(x+2)^4$$

化簡各項係數後，最終的四階泰勒多項式為：

$$P_4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x+2) + \frac{3}{16}(x+2)^2 + \frac{1}{8}(x+2)^3 + \frac{5}{64}(x+2)^4$$

3 Use Taylor's theorem to obtain an upper bound for the error of the approximation. Then calculate the exact value of the error. Round the error to the fourth decimal place.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!}$$

解答：

此為函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 處展開的五階 Maclaurin polynomial 估計 $x = 1$ 的值。根據泰勒定理，餘項公式為：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中 c 介於 0 與 1 之間。代入 $n = 5$ 得到：

$$R_5(1) = \frac{e^c}{6!}(1-0)^6 = \frac{e^c}{720}$$

因為 e^x 為遞增函數，在區間 $(0, 1)$ 內的最大值發生在 $c \to 1$ 處，且已知 $e < 3$，故誤差上限可設定為 $\frac{3}{720} = \frac{1}{240}$。接著計算精確誤差，近似值為：

$$T_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60}$$

因此，精確誤差為真實值減去近似值，即 $e - \frac{163}{60} \approx 2.718281828459 - 0.00161516 \approx 0.0016$。