**連續性、偏導數與可微分性**

設 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$。

# 基本定義

1. **連續**
若 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 滿足
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$
則稱 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 連續。

2. **偏導數**
若極限存在，定義
$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},\qquad f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

3. **方向導數**
取單位向量 $\mathbf{u}=\langle a,b\rangle$。若極限存在，定義
$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+ta,y+tb)-f(x,y)}{t}.$$

4. **可微分**
若存在函數 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，使得 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ 當 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$，且
$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$
則稱 $f$ 在 $(x,y)$ 可微。

# 範例與反例

1. **可微 $\Rightarrow$ 連續且 $f_x,f_y,D_{\mathbf{u}}f$ 皆存在。**
（定理結論，略證。）

2. **$f_x,f_y$ 連續 $\Rightarrow$ 可微。**
（定理結論，略證。）

3. **連續但偏導不存在：** $f(x,y)=|x|$

   **連續性** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0=f(0,0)$。 因極限值與函數值相等，故在原點連續。

   **偏導數**
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\,\Delta x\,|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$
左極限為 $-1$、右極限為 $1$，極限不存在；$f_y(0,0)=0$。 故「連續$\not\Rightarrow$兩偏導皆存在」。

4. **偏導存在但不連續：**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

**偏導數**

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,\quad f_y(0,0)=0.$$

**沿直線** $y=mx$

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

極限值依參數 $m$ 改變，故 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在 $\Rightarrow$ 不連續。

5. **偏導存在但方向導數未必存在（同上函數）**

令 $\mathbf{u}=\langle a,b\rangle$、$ab\neq 0$：

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2ab}{t^2(a^2+b^2)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{ab}{(a^2+b^2)}}{t}\ \text{（發散）}.$$

因此「偏導存在$\nRightarrow$所有方向導數皆存在」。

6. **偏導存在但不可微（仍用同函數）**

因在 $(0,0)$ 不連續 $\Rightarrow$ 必不可微。 可見「偏導存在$\neq$可微」。

7. **所有方向導數皆存在但不可微：**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

**(i) 任意方向導數存在**　取單位向量 $\mathbf{u}=\langle a,b\rangle$，令 $(x,y)=t\mathbf{u}=(ta,tb)$，則

$$f(ta,tb)=\frac{t^3a^3}{t^2(a^2+b^2)}=t\,a^3.$$

因此

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-0}{t}=a^3,\qquad (\forall\,\mathbf{u}).$$

**(ii) 在 $(0,0)$ 連續**　以極座標 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$：

$$|f(x,y)|=\left|\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2}\right|=r\,|\cos^3\theta|\xrightarrow[r\to 0]{}0=f(0,0).$$

**(iii) 不可微**　假設可微，則存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ 使

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0,0) + f_x(0,0)\,\Delta x + f_y(0,0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y.$$

仍取 $\Delta x = ta,\ \Delta y = tb\ (t \neq 0)$，兩邊同除 $t$ 得

$$\frac{f(ta,tb) - 0}{t} = f_x(0,0)\,a + f_y(0,0)\,b + \varepsilon_1\,a + \varepsilon_2\,b.$$

令 $t \to 0$，右側趨近 $f_x(0,0)\,a + f_y(0,0)\,b$， 左側極限卻是 $a^3$。 由於 $a^3$ 不是 $a, b$ 的一次線性式（取 $(a,b) = (1,0), (0,1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 即生矛盾）， 故假設不成立，$f$ 在 $(0,0)$ 不可微。

8. **所有方向導數皆存在但不連續：**

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**(i) 任意方向導數存在**　同樣設 $(x,y) = t\mathbf{u} = (ta, tb)$：

$$\frac{g(ta,tb) - 0}{t} = \frac{t^3 a^2 b}{t^4 a^4 + t^2 b^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{a^2 b}{b^2 + a^4 t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} \begin{cases} \dfrac{a^2}{b}, & b \neq 0, \\ 0, & b = 0. \end{cases}$$

因此 $D_{\mathbf{u}} g(0,0)$ 對所有方向皆存在。

**(ii) 在 $(0,0)$ 不連續**　沿曲線 $y = x^2$：

$$g\big(x, x^2\big) = \frac{x^2\,x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq g(0,0),$$

故極限不存在，$g$ 不連續。

9. **可微但偏導不連續：**

$$h(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**(i) 在 $(0,0)$ 可微**　設 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$。因 $|\sin| \le 1$，

$$|h(x,y)| \le r^2.$$

取

$$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = r,$$

且注意 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，則

$$h(\Delta x, \Delta y) = 0 + 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y,$$

而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0$，滿足可微定義。

**(ii) 偏導數在原點不連續**　固定 $y = 0$、$x \neq 0$，單變數求導

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}.$$

第二項於 $[-1,1]$ 振盪無界極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial h}{\partial x}(x,0)$$

不存在，故偏導在 $(0,0)$ 不連續。