CONTENTS

Chapter 14

多重積分

Contents

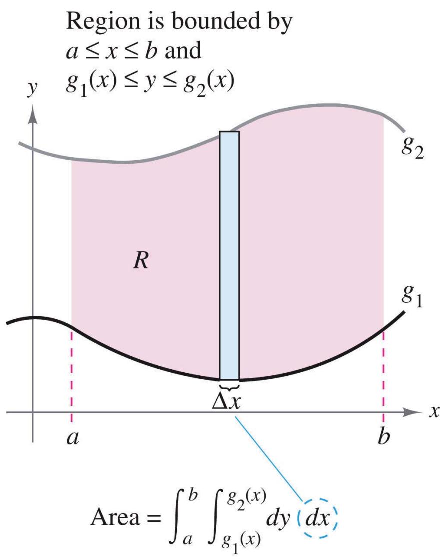
14.1 逐次積分和平面上的面積

14.1.1 逐次積分

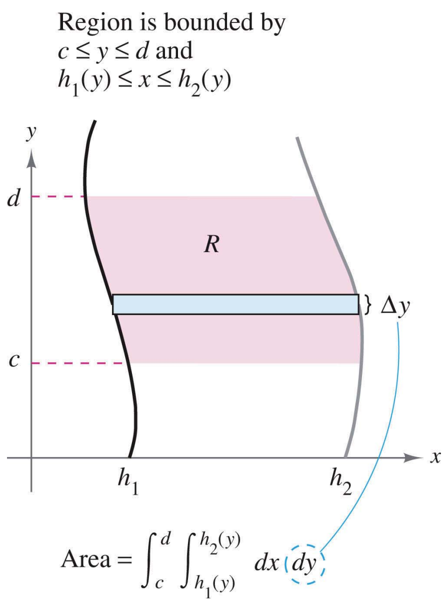
逐次積分

1. $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}x = f(x,y)\Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y),y) - f(h_1(y),y)$ 對 x 積分
2. $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)\,\mathrm{d}y = f(x,y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x))$ 對 y 積分

14.1.2 平面上區域的面積



(a) 鉛直單純區域。



(b) 水平單純區域。

Figure 14.1: 鉛直水平單純區域。

Definition 14.1 (平面區域的面積).

1. 如果 R 由聯立不等式 $a \le x \le b$ 和 $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ 定義，式中 g_1 和 g_2 是 $[a,b]$ 上的連續函數，則 R 的面積等於下列積分

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \text{圖 } 14.1(a)\ (\text{鉛質單純形})$$

2. 如果 R 由聯立不等式 $c \le y \le d$ 和 $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ 定義，式中 h_1 和 h_2 是 $[c,d]$ 上的連續函數，則 R 的面積等於下列積分

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{圖 } 14.1(b)\ (\text{水平單純形})$$

14.2 二重積分和體積

14.2.1 二重積分和立體的體積

Definition 14.2 (二重積分). 假設 f 是定義在 xy-平面中一個有界閉區域 R 上的函數，如果極限

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

存在，我們就稱 f 在 R 上可積分 (***integrable***)，而以 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$ 表此極限值，稱爲 f 在 R 上的二重積分 (***double integral***)。

立體區域體積 (**Volume of a solid region**) 如果 $f(x,y)\geq 0$，並且在平面區域 R 上可積，則定義在 R 之上，在 f 的圖形之下的立體區域體積爲

$$V = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

14.2.2 二重積分的性質

Theorem 14.1 (二重積分性質 (**Properties of double integrals**)). 令 f 和 g 都是平面中一個有界閉區域 R 上的連續函數，c 是一個常數，則 f 和 g 均在 R 上可積並且有下列性質。

1. $\iint_R cf(x,y)\,\mathrm{d}A = c\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$
2. $\iint_R [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}A = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A \pm \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}A$
3. 若 $f(x,y)\geq 0$，則 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A \geq 0$
4. 若 $f(x,y)\geq g(x,y)$，則 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A \geq \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}A$
5. 若 R 是兩個互不重疊區域 R_1 和 R_2 的聯集，則 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}A + \iint_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}A$

14.2.3 計算二重積分

Theorem 14.2 (富比尼定理 (**Fubini's Theorem**)). 已知 f 在平面區域 R 上連續。

1. 如果 R 由聯立不等式 $a\leq x\leq b$, $g_1(x)\leq y\leq g_2(x)$ 定義，其中 g_1 和 g_2 都在 $[a,b]$ 上連續，則
$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
2. 如果 R 由聯立不等式 $c\leq y\leq d$, $h_1(y)\leq x\leq h_2(y)$ 定義，其中 h_1 和 h_2 都在 $[c,d]$ 上連續，則
$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

14.2.4 函數的平均值

Definition 14.3 (函數在區域上平均值). 假設 $f(x, y)$ 在區域 R 上可積分，則 f 在 R 上的平均值 (*average value*) 定爲

$$\frac{1}{A}\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}A$$

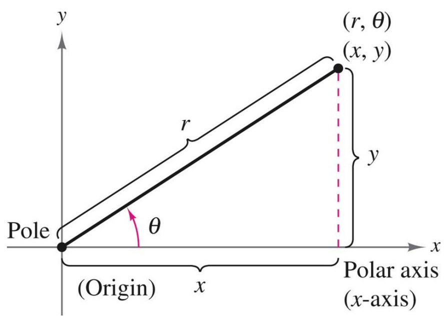
式中 A 是 R 的面積。

14.3 積分變數變換：極座標

14.3.1 在極座標系中計算二重積分

Theorem 14.3 (極座標積分變數變換). 區域 R 在極座標系中以聯立不等式 $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ 定出，其中 $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$。如果 g_1, g_2 在 $[\alpha, \beta]$ 上連續而 $f(x, y)$ 在 R 上連續，則

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$



14.4 質心和慣性矩 (補充章節)

14.4.1 質量

Definition 14.4 (非均勻密度平面狀薄膜質量). 假設對應於一平面區域 R 的薄膜其密度函數是由一連續函數 ρ 所決定，我們以二重積分定此薄膜的質量 m 如下：

$$m = \iint_R \rho(x, y)\,\mathrm{d}A. \qquad \text{非均勻密度}$$

14.4.2 質矩和質心

Definition 14.5 (非均勻密度平面狀薄膜的質矩和質心)**.** 假設對應於一平面 R 的薄膜其密度函數是由一連續函數 ρ 所決定，則以二重積分定此薄膜對 x 軸和 y 軸的質矩 (***moments of mass***) 分別爲

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)\,\mathrm{d}A \quad \text{和} \quad M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,\mathrm{d}A$$

如果 m 是此薄膜的質量，則其質心 (***center of mass***) 的座標爲

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$$

如果 R 只是代表一個幾何形狀，點 $(\overline{x}, \overline{y})$ 稱爲 R 的 形心 (***centroid***)，此時相當於 ρ 是常數的情形。

14.4.3 慣性矩

14.5 曲面面積

14.5.1 曲面面積

Definition 14.6 (曲面面積 (**Surface area**))**.** 假設 f 和 f 的偏導數都在 xy-平面中的閉區間 R 上連續。以 $z = f(x,y)$ 的圖形在 R 之上所定出的曲面 S 面積公式爲

$$\text{曲面面積} = \iint_R \mathrm{d}S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\,\mathrm{d}A$$

14.6 三重積分與應用

14.6.1 三重積分

Definition 14.7 (三重積分)**.** 如果 f 是一個連續且在區域 Q 內的函數，則 f 的三重積分 (***triple integral***) 在 Q 區域定義爲

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

其中極限存在。在區域 Q 的體積 (***volume***) 爲

$$Q\text{的體積} = \iiint_Q \mathrm{d}V$$

Theorem 14.4 (計算逐次積分). 如果 f 是一個連續且在區域 Q 内的函數，且

$$a \le x \le b, \quad h_1(x) \le y \le h_2(x), \quad g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$$

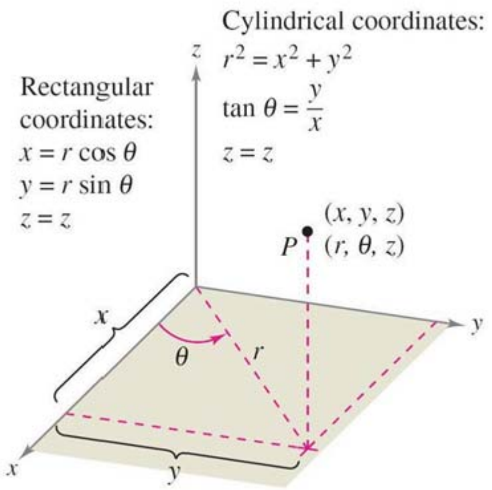
其中 h_1, h_2, g_1 和 g_2 皆是連續函數，則

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

14.6.2 質心和慣性矩

14.7 圓柱和球面坐標的三重積分

14.7.1 圓柱坐標的三重積分



- 圓柱坐標 (**cylindrical coordinates**) 由矩形的變換形式爲

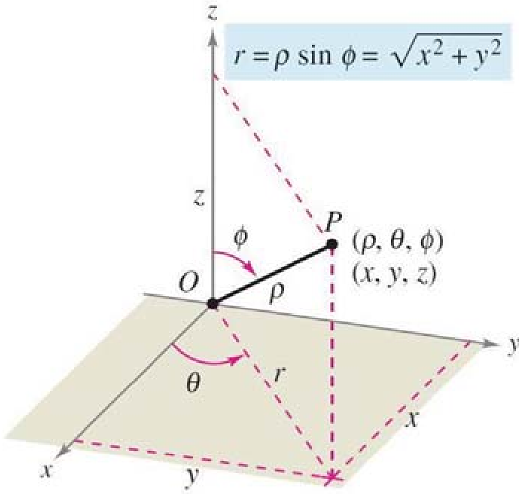
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

- $$Q = \{(x,y,z) : (x,y) \text{ is in } R,\ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$$

  and

  $$R = \{(r,\ \theta) : \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}.$$

$$\begin{aligned} &\iiint_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{h_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$



Spherical coordinates

14.7.2 球面座標的三重積分

⊡ 球面座標轉換成矩形的方程式為

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

⊡

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi) : \rho_1 \le \rho \le \rho_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ \phi_1 \le \phi \le \phi_2\}$$

其中 $\rho_1 \ge 0,\ \theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$, and $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \pi$,

$$\begin{aligned}&\iiint_Q f(x, y, z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

14.8 變數變換：雅可比矩陣

14.8.1 雅可比

Definition 14.8 (雅可比). 如果 $x = g(u, v)$ 和 $y = h(u, v)$ 則 雅可比 (***Jacobian***)中 x 和 y 對於 u 和 v 記為 $\partial(x, y)/\partial(u, v)$，則

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

14.8.2 二重積分的變數變換

Theorem 14.5 (二重積分的變數變換). 令 R 在 xy 平面上是垂直或水平的區域，且令 S 在 uv-平面是垂直或水平的區域。假設 T 來自 S 區域，且轉換到 R 區域爲 $T(u,v)=(x,y)=(g(u,v),h(u,v))$，其中 g 和 h 皆有連續和一階可微函數。除了可能在 S 的邊界上之外，T 是一對一的函數。如果 f 是在 R 上連續和 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 在 S 上是非零數，則

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_S f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

極坐標 (**Polar Coordinates**)

令

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases} \qquad r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi).$$

建構雅可比矩陣

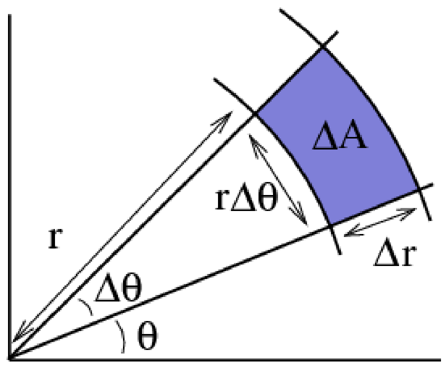
$$J_{極}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{pmatrix}.$$

計算行列式：

$$\det\big(J_{極}\big)=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{vmatrix}=r\big(\cos^2\theta+\sin^2\theta\big)=r.$$

因此

$$dx\,dy=\big|\det(J_{極})\big|\,dr\,d\theta=r\,dr\,d\theta.$$



若區域 R 由

$$\alpha\le\theta\le\beta, \qquad g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta)$$

構成，則

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f\big(r\cos\theta,\ r\sin\theta\big)\,r\,dr\,d\theta.$$

柱坐標 (**Cylindrical Coordinates**)

令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, & \qquad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}. \\ z = z, \end{cases}$$

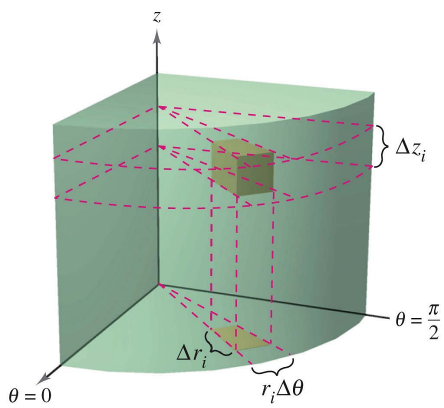
$$J_{柱} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\ \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

計算行列式：

$$\det\big(J_{柱}\big) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\ \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\ \sin\theta \\ \sin\theta & r\ \cos\theta \end{pmatrix}\right) \times 1 = r.$$

因此

$$dx\,dy\,dz \ = \ \big|\det(J_{柱})\big|\ dr\,d\theta\,dz \ = \ r\,dr\,d\theta\,dz.$$



若三維區域 Q 由

$$\theta_1 \ \leq \ \theta \ \leq \ \theta_2, \quad g_1(\theta) \ \leq \ r \ \leq \ g_2(\theta), \quad h_1(x,y) \ \leq \ z \ \leq \ h_2(x,y)$$

構成，則

$$\begin{aligned} &\iiint_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{h_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

(常見的積分次序為先對 z 積分，再對 r 積分，最後對 θ 積分。)

球坐標 (**Spherical Coordinates**)

令

$$\begin{cases} x = \rho\, \sin\phi\, \cos\theta, \\ y = \rho\, \sin\phi\, \sin\theta, \\ z = \rho\, \cos\phi, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ \phi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,2\pi).$$

其中

- ⊡ ρ 爲徑向距離；
- ⊡ ϕ 爲極角 (從正 z 軸向下量，範圍 $[0,\pi]$)；
- ⊡ θ 爲方位角 (在 xy 平面上的旋轉角，範圍 $[0,2\pi)$)。

建構雅可比矩陣

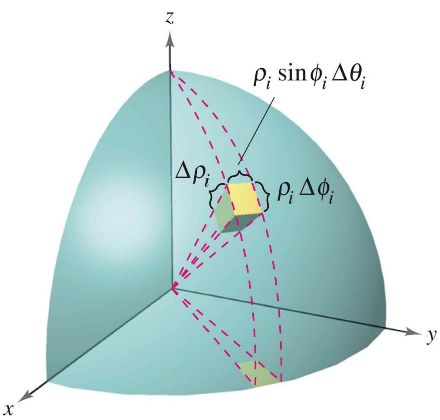
$$J_{球} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi\, \cos\theta & \rho\, \cos\phi\, \cos\theta & -\rho\, \sin\phi\, \sin\theta \\ \sin\phi\, \sin\theta & \rho\, \cos\phi\, \sin\theta & \rho\, \sin\phi\, \cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\, \sin\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

展開計算行列式：

$$\det\big(J_{球}\big) = \rho^2\, \sin\phi.$$

因此

$$dx\, dy\, dz = \big|\det(J_{球})\big|\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \rho^2\, \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$



若球形區域 Q 由

$$Q = \{(\rho,\theta,\phi) : \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

構成，則

$$\begin{aligned} &\iiint_Q f(x,y,z)\, \mathrm{d}V \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

同樣可依需要更改積分次序，調整各變數的積分上下限。

INDEX