CONTENTS

List of Tables

List of Figures

Chapter 9

無窮級數

Contents

9.1 數列

9.1.1 數列

9.1.2 數列的極限

Definition 9.1 (數列的極限). *設 $\{a_n\}$ 是一個數列，L 是一個實數。如果任予一個 $\varepsilon > 0$，都能找到 $M > 0$，使得 $n > M$ 可以推得 $|a_n - L| < \varepsilon$，我們就稱數列 $\{a_n\}$ 的極限 (limit) 是 L，記成*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

以 L 爲極限的數列，也可稱爲收斂到 L 的數列，或是簡稱爲收斂 (converges) 數列；如果數列的極限不存在就稱爲發散 (diverges)。

Theorem 9.1 (數列的極限).
已知函數 f 在 $x \to \infty$ 時有極限 L，亦即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

如果 $f(n) = a_n$, n 是正整數，則數列 $\{a_n\}$ 亦以 L 爲極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Theorem 9.2 (數列極限的性質).
已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = K$，則有

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$ *2.* $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$, c *是任意實數*
3. $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = LK$ *4.* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K}$, $b_n \neq 0$ *同時* $K \neq 0$

常用的排序方式 假設 $a > 0$ 和 $b > 1$，則

$$\ln n \prec n^a \prec b^n \prec n!$$

其中 $a_n \prec b_n$ 表示 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$。

Theorem 9.3 (數列夾擠定理 (Squeeze Theorem for sequences)). *已知*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

並且存在一個正整數 N 使得只要 $n > N$，不等式 $a_n \le c_n \le b_n$ 成立，則

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Theorem 9.4 (絕對值定理 (Absolute Value Theorem)). *如果*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad \text{若且唯若} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

9.1.3 察覺數列的規律

9.1.4 單調數列和有界數列

Definition 9.2 (單調數列 (Monotonic sequence)). *如果一個數列 $\{a_n\}$ 的各項是遞增的*

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

或是遞減

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$$

我們就稱 $\{a_n\}$ 是單調 (monotonic)數列。

Definition 9.3 (有界數列 (Bounded sequence)).

(a) *如果有一個實數 M，使得數列 $\{a_n\}$ 中的每一項都滿足 $a_n \le M$，就稱數列 $\{a_n\}$ 有上界 (bounded above)，而稱 M 是 $\{a_n\}$ 的一個上界 (upper bound)。*

(b) *如果有一個實數 N，使得數列 $\{a_n\}$ 中的每一項都滿足 $a_n \ge N$，就稱數列 $\{a_n\}$ 有下界 (bounded below)，而稱 N 是 $\{a_n\}$ 的一個下界 (lower bound)。*

(c) *如果數列 $\{a_n\}$ 同時有上界和下界，就稱 $\{a_n\}$ 是有界 (bounded)數列。*

Theorem 9.5 (單調有界數列 (Bounded monotonic sequences)). *如果 $\{a_n\}$ 是一個單調有界的數列，則 $\{a_n\}$ 一定收斂。*

9.2 級數和收斂

9.2.1 無窮級數

Definition 9.4 (*級數收斂或發散*). *以 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 表無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 項部分和 (nth partial sum)。如果數列 $\{S_n\}$ 收斂到 S，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂 (converges)，並且以 S 爲級數和 (sum of the series)表示成*

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ 或 } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

如果 $\{S_n\}$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散 (diverges)。

□ 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$ 是一個所謂的裂項相消級數 (**telescoping series**)，有如一個用無窮多個由大到小的套筒套成的望遠鏡，以下列型式呈現

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots$$

注意到加上第二項時，b_2 消去；加上第三項時，b_3 消去等等，由於第 n 個部分和是

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

所以裂項相消級數收斂的充分必要條件是當 $n \to \infty$ 時，b_n 有極限。此時，級數的和是

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

9.2.2 幾何級數

Theorem 9.6 (幾何級數的收斂和發散). *如果幾何級數 (geometric series)的公比爲 r，當 $|r| \geq 1$ 時，級數發散；而當 $0 < |r| < 1$ 時，級數收斂，其和爲*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1$$

Theorem 9.7 (無窮級數的性質). *如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$，而 c 是一個實數，則下列級數會收斂到等號右邊的和。*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

9.2.3 利用一般項檢驗發散

Theorem 9.8 (收斂級數一般項的級數). *如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。*

Theorem 9.9 (利用一般項檢驗發散). *如果 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。*

9.3 級數檢定和 p 級數

9.3.1 積分檢定

Theorem 9.10 (積分檢定 (Integral Test)). *如果 f 在 $(1, \infty]$ 上是一個非負的、連續並且遞減的函數，令 $a_n = f(n)$，則*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{和} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

同時收斂，或同時發散。

9.3.2 p-級數與調和級數

- 在本章節後半，我們要研究另一型的級數，此類級數具下列型式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

稱爲 p 級數 (p-series)，其中 p 是一個正數，判斷 p 級數的斂散性非常簡單，見下面定理 9.11。當 $p = 1$ 時，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

稱爲調和級數 (harmonic series)。

- 形如 $\sum \frac{1}{(an+b)}$ 稱爲 廣義調和級數 (general harmonic series)。

尤拉常數 γ (C) (Euler-Mascheroni constant γ (C))
http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Mascheroni_constant

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.5772156649$$

是數學常數常在數值分析與數論中看見。

黎曼 ζ 函數 (Riemann zeta function $\zeta(s)$)
http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function
設一複數 s，其實數部份 > 1 而且：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

它亦可以用積分定義：

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x$$

在區域 $s : Re(s) > 1$ 上，此無窮級數收斂並爲一全純函數。(上式中 Re 表示複數的實部)。尤拉在 1740 考慮過 s 爲正整數的情況，後來切比雪夫拓展到 $s > 1$。波恩哈德·黎曼認識到：ζ 函數可以通過解析開拓來擴展到一個定義在複數域 $(s,\ s \neq 1)$ 上的全純函數 $\zeta(s)$。這也是黎曼猜想所研究的函數。

Theorem 9.11 (*p-級數的收斂與發散*). *p 級數 (p-series)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

(a) *當 $p > 1$ 時，p-級數收斂。*

(b) *當 $0 < p \leq 1$ 時，p-級數發散。*

9.4 級數的比較

9.4.1 (直接)互比檢定

Theorem 9.12 (直接互比檢定 (Direct Comparison Test)). *已知 $0 < a_n \leq b_n$ 對於所有 n 都成立。*

(a) *如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。*

(b) *如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散。*

9.4.2 極限互比檢定

Theorem 9.13 (極限互比檢定 (Limit Comparison Test)). *假設 $a_n > 0,\ b_n > 0$ 並且*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = L$$

其中 L 是一個有限的正數，則 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同時收斂或同時發散。

9.5 交错級數

9.5.1 交错級數

Theorem 9.14 (交錯級數檢定 (Alternating Series Test)). *令 $a_n > 0$，交錯級數*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

只要滿足下列兩個條件

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(b) *對於所有的 n, $a_{n+1} \leq a_n$，交錯級數就會收斂。*

9.5.2 交错級數的餘項

Theorem 9.15 (交錯級數餘項 (Alternating Series Remainder)). *如果一個收斂的交錯級數一般項滿足 $a_{n+1} \leq a_n$，則其餘項 $R_N = S - S_N$ 的絕對值滿足*

$$|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}$$

9.5.3 絕對和條件收斂

Definition 9.5 (絕對和條件收斂).

(a) *如果 $\sum |a_n|$ 收斂，我們稱 $\sum a_n$ 絕對收斂 (absolutely convergent)。*

(b) *如果 $\sum a_n$ 收斂但是 $\sum |a_n|$ 發散，我們稱 $\sum a_n$ 條件收斂 (conditionally convergent)。*

Theorem 9.16 (絕對收斂 (Absolute convergence)). *如果級數 $\sum |a_n|$ 收斂，則級數 $\sum a_n$ 也會收斂。*

9.5.4 級數的重排

9.6 比例與根式檢定

9.6.1 比例檢定

Theorem 9.17 (比例檢定 (Ratio Test)). *令 $\sum a_n$ 表一個一般項不為 0 的級數。*

(a) *如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ 則 $\sum a_n$ 絕對收斂。*

(b) *如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ 則 $\sum a_n$ 發散。*

(c) *如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，本檢定暫無結論。*

9.6.2 根式檢定

Theorem 9.18 (根式檢定 (Root Test)). 令 $\sum a_n$ 表一個級數，

(a) 如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ 則 $\sum a_n$ 絕對收斂。

(b) 如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ 則 $\sum a_n$ 發散。

(c) 如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$，表檢定暫無結論。

9.6.3 檢定的策略

檢定斂散性的指導原則

- 觀察一般項是否趨近 0？如果不是的話，級數發散。
- 是否級數有特別的形式-幾何級數、p-級數、裂項相消級數或交錯級數？
- 積分檢定，比例檢定或根式檢定能否用上？
- 是否有一個恰當的已知級數可以用來互相比較？

9.7 泰勒多項式和近似值

9.7.1 基本函數的多項式近似

9.7.2 泰勒和馬克勞林多項式

Definition 9.6 (n 次泰勒和馬克勞林多項式). 如果 f 在 c 有 n 階導數則

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

稱爲 f 在 c 的 n 階泰勒多項式 (nth Taylor polynomial for f at c)，如果 $c = 0$，則

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也稱爲 f 在 c 的 n 階馬克勞林多項式 (nth Maclaurin polynomial for f at c)。

9.7.3 泰勒多項式的餘項

Theorem 9.19 (泰勒定理 (Taylor's Theorem)). 如果 f 在一個包含 c 的區間 I 上可以連續微分 $n+1$ 次，則對任一個 I 中的 x，都會在 x 和 c 之間存在一點 z 使得

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

式中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

9.8 冪級數

9.8.1 冪級數

Definition 9.7 (冪級數). *假設 x 表示一個變數，形如下的無窮級數*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

稱爲一個冪級數 (power series)。一般來説，如果以 $x - c$ 代換 x，得到形狀如下的冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

稱爲一個以 c 爲中心的冪級數 (power series centered at c)，c 爲常數。

9.8.2 收斂半徑和收斂區間

Theorem 9.20 (冪級數的斂散性). *一個以 c 爲中心的冪級數，必滿足下列三者之一。*

(a) *此級數只在 c 收斂。*

(b) *存在一個實數 $R > 0$，使得此級數在 $|x - c| < R$ 時絕對收斂，而在 $|x - c| > R$ 時發散。*

(c) *對於所有的 x，此級數絕對收斂。*

R 稱爲此冪級數的收斂半徑 (radius of convergence)，如果級數只在 c 收斂，收斂半徑爲 $R = 0$；而如果級數對於所有的 x 都收斂，則收斂半徑 $R = \infty$，至於收斂區間 (interval of convergence) 就是使此冪級數收斂的 x 全體。

9.8.3 在端點的斂散性

9.8.4 冪級數的微分和積分

Theorem 9.21 (以冪級數定義函數的性質). 下面是一個以冪級數表示的函數 $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \\ &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \end{aligned}$$

假設收斂半徑 $R > 0$，則在區間 $(c-R,\ c+R)$ 上 f 可微(因此連續)。f 的導函數和反導函數可以逐項計算如下：

(a) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$

(b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} = C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots$

以上兩式以$f(x)$ 右端逐項微分和積分得出的冪級數，其收斂半徑和 $f(x)$ 一樣都是 R。但是收斂區間可能因爲各自在端點的行爲而有差異。

9.9 以冪級數表示函數

9.9.1 幾何冪級數

幾何級數 (geometric series) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 若且唯若 $|x| < 1$。

9.9.2 冪級數的運算

冪級數的運算規則 令 $f(x) = \sum a_n x^n$ 和 $g(x) = \sum b_n x^n$，則

(a) $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

(b) $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

(c) $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

9.10 泰勒和馬克勞林級數

9.10.1 泰勒和馬克勞林級數

Theorem 9.22 (收斂冪級數的型式 (The form of a convergent power series)). 如果冪級數 $\sum a_n(x-c)^n$ 在一個包含 c 的開區間 I 上代表函數 f，亦即對所有 I 中的 x 恆有 $f(x) = \sum a_n(x-c)^n$ 則 $a_n = f^{(n)}(c)/n!$，且

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

Definition 9.8 (泰勒和馬克勞林級數). *如果函數 f 在 $x=c$ 無窮次可微，則我們稱下列級數*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

爲泰勒級數 (Taylor series)；如果 $c=0$，此級數也稱爲 f 的馬克勞林級數 (Maclaurin series)。

Theorem 9.23 (泰勒級數的斂散性). *如果對區間 I 中所有的 x 都有 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$，則 f 的泰勒級數會收斂並且收斂值等於 $f(x)$，*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

求泰勒級數的指導原則

(a) 連續微 $f(x)$ 若干次後，在 $x=c$ 求各階導數。

$$f(c),\quad f'(c),\quad f''(c),\quad f'''(c),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(c),\quad \ldots$$

看看可否找出規律。

(b) 以係數 $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ 寫下泰勒級數

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

並決定收斂區間。

(c) 在收斂區間中，決定此一冪級數是否收斂到 $f(x)$。

9.10.2 二項級數

9.10.3 基本泰勒級數表

基本函數的冪級數

函數	收斂區間
$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots$	$0<x<2$
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$	$-1<x<1$
$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{(n-1)}(x-1)^n}{n}+\cdots$	$0<x\le 2$
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \leq x \leq 1$
$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} + \cdots$	$-1 < x < 1$[1]