15: Summary

The main results of this chapter are all higher dimensional versions of the Fundamental Theorem of Calculus. In each case, we have an integral of a "derivative" over a region on the left side, and the right side involves the values of the original function only on the it boundary of the region.

Fundamental Theorem of Calculus. *Suppose $F'(x)$ is continuous on $[a,b]$. Then*

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Fundamental Theorem of Line Integrals. *Let $C : \mathbf{r}(t), a \le t \le b$ be a smooth curve. Let $f(\mathbf{x})$ be a function whose gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ is continuous on C. Then*

$$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Figure 1: Fundamental theorem of calculus and line integrals.

Green's Theorem. *Let C be a positively oriented, piecewise smooth, simple closed curve in the plane and let D be the region bounded by C. If $P, Q \in C^1(\tilde{D})$, where $\tilde{D} \supset D$ is open, then*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Stokes' Theorem. *Let S be an oriented piecewise smooth surface that is bounded by a simple, closed, piecewise smooth boundary curve C with positive orientation. Let $\mathbf{F}$ be a C^1 vector field in an open region $\tilde{S} \supset S$. Then*

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Figure 2: Green's theorem and Stokes' theorem.

The Divergence Theorem. *Let E be a simple solid region and let S be the boundary surface of E, given with positive outward orientation. Let $\mathbf{F}$ be a C^1 vector field in an open region $\tilde{S} \supset E$. Then*

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

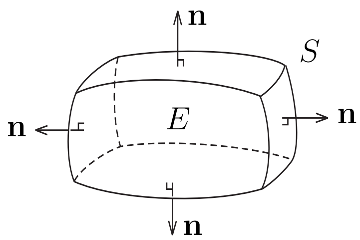


Figure 3: The divergence theorem.

第一類曲線積分

(1) 設 C 爲空間曲線, 其參數式爲 $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, 定義

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(2) 若 C 爲平面曲線, 則 C 可視爲分量 $z(t) \equiv 0$ 的空間曲線。

(3) 應用: 曲線弧長 $f \equiv 1$; 線圈質量 $f = \rho$; 矩 (moment) $f = x\rho, y\rho, z\rho$ 等; 質心。

(4) $\mathrm{d}s$ 爲弧長參數 (恆正), 所以積分式的下限與上限分別代入參數式之下界與上界。

第二類曲線積分

(1) 設 C 爲空間曲線, 其參數式爲 $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a \le t \le b$; 假設 $\mathbf{r}(a)$ 爲曲線的起點, $\mathbf{r}(b)$ 爲曲線的終點, $\mathbf{T}(t)$ 爲曲線之單位切向量。記 $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中的向量場, 定義

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,\mathrm{d}t.$$

(2) 若 C 爲平面曲線, 則 C 可視爲分量 $z(t) \equiv 0$ 的空間曲線。

(3) 應用: 功 (work done by the force $\mathbf{F}$); 環流量 (circulation)。

(4) $\mathrm{d}\mathbf{r}$ 有方向性, 所以積分式的下限與上限分別代入曲線起點與終點相應的參數值。

($\star$) 若 C 爲平面曲線, 有時會考慮向量場 $\mathbf{F}$ 沿曲線 C 與單位法向量 $\mathbf{n}$ 內積的線積分:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})|\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y.$$

第一類曲面積分

(1) 設 S 爲曲面, 其參數式爲 $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$, 其中 $D = \{(u,v)|a \le u \le b, c \le v \le d\}$, 定義

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\mathrm{d}A.$$

(2) 若 S 爲平面區域, 則 S 可視爲分量 $z(u,v) \equiv 0$ 的曲面。

(3) 應用: 曲面面積 $f \equiv 1$; 曲面質量 $f = \rho$; 矩 (moment) $f = x\rho, y\rho, z\rho$ 等; 質心。

(4) $\mathrm{d}A$ 爲面元參數 (恆正), 所以積分式的下限與上限分別代入參數式之下界與上界。

第二類曲面積分

(1) 設 S 爲曲面, 其參數式爲 $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$, 其中 $D = \{(u,v) | a \le u \le b, c \le v \le d\}$。記 $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 中的向量場, 定義

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)(u,v)\,\mathrm{d}A.$$

(2) 若 S 爲平面區域, 則 S 可視爲分量 $z(u,v)\equiv 0$ 的曲面。

(3) 應用: 通量 (flux integral)。

(4) $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ 有方向性, 所以單位法向量 $\mathbf{n}$ 必須明確指定。

(5) 規定封閉曲面, 法向量 $\mathbf{n}$ 指向外; 非封閉區域, 法向量 $\mathbf{n}$ 與邊界的定向呈右手定則。

微積分基本定理: 區域(含微分) 及其邊界(不含微分) 的關係

(1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$。 微積分基本定理

(2) $\displaystyle\int_C \nabla f\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$。 線積分基本定理

(3) $\displaystyle\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$。 Green, Stoke 定理 (封閉曲線)

(4) $\displaystyle\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{dV} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$。 散度定理 (封閉曲面)

各種積分的形式都要熟悉(向量內積的表示法、坐標表示法、算子表示法)

(1) 封閉的平面曲線之 Green 定理 (切向量版本):

$$\iint_D \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}A = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A \overset{\text{G.T.}}{=} \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

(2) 封閉的平面曲線之 Green 定理 (法向量版本):

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}A = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}A \overset{\text{G.T.}}{=} \oint_C -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

(3) $\displaystyle\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$

(4) $\displaystyle\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_E \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V.$

特別的向量場

(1) 定義 $\mathbf{F}$ 爲保守向量場 (conservative vector field): 若存在函數 f 使得 $\nabla f = \mathbf{F}$。

(2) 性質:

- 保守向量場的旋度爲零向量, 即: $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$。
- 線積分與路徑選取無關。
- 封閉曲線上之線積分爲零。

(3) 應用: 線積分基本定理與 Stoke 定理可以合併: 若曲面 S 的邊界爲 C (封閉), 則

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_C \nabla f\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = 0.$$

(4) 判定 $\mathbf{F}$ 爲保守向量場的方法: 檢查 $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$。以坐標式寫下, 則爲

- $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$: $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$。
- $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$: $\quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$。

(5) 若區域爲單連通 (simply connected), 且 $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{F}$ 爲保守場。

活用定理

(1) 若平面曲線非封閉曲線, 可適當補上一條曲線讓它封閉, 便可用 Green 定理。

(2) 若空間曲線非封閉曲線, 可適當補上一條曲線讓它封閉, 並且它是某個曲面的邊界, 便可用 Stoke 定理。

(3) 若曲面非封閉曲面, 可適當補上一個曲面使之爲某個實體的邊界, 便可用散度定理。

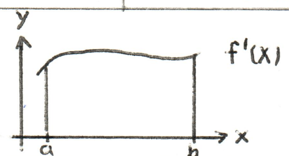
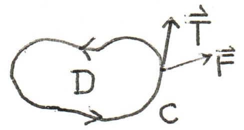
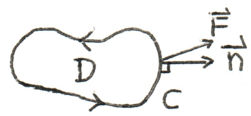
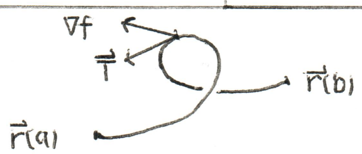
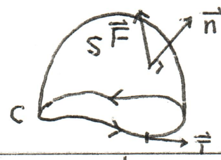
(4) 若向量場 $\mathbf{F}$ 非保守向量場, 可試著找到保守向量場 $\mathbf{F}_1$ 使得 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, 則線積分對於 $\mathbf{F}_1$ 的部分可以用線積分基本定理。

第二類曲線、曲面積分的計算方式: 透過曲線、曲面參數式 $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(u,v)$

(1) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t.$

(2) $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)(u,v)\,\mathrm{d}A.$

	三維	二維	一維	零維
平面			$\int_a^b f'(x)\,dx$	$= f(b)-f(a)$ Fundamental Theorem of Calculus (5.4)
平面		$\iint_D \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA$	$= \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ Green's Theorem (tangent vector) (16.4)	
平面		$\iint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dA$	$= \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ Green's Theorem (normal vector) (16.5)	
空間			$\int_C \nabla f\cdot\vec{T}\,ds$	$= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$ Fundamental Theorem of Line Integral (16.3)
空間		$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$	$= \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ Stokes' Theorem (16.8)	
空間	$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV$	$= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ The Divergence Theorem (16.9)		

	三維	二維	一維	零維
平面				
平面				
平面				
空間				
空間				
空間