1 solution :

1. **求導數：**

$$f(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$$

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = \cos(x)\big(2\sin(x) + 1\big)$$

2. **找臨界點：令** $f'(x) = 0$

$$\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}$$

$$2\sin(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(x) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{6}, \ \frac{11\pi}{6}$$

3. **依區間測試符號判斷遞增遞減：**

區間	測試點	$\cos(x)$	$2\sin(x)+1$	$f'(x)$符號
$(0, \frac{\pi}{2})$	$x = \frac{\pi}{4}$	$+$	$+$	$+$(遞增)
$(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$	$x = \pi$	$-$	$+$	$-$(遞減)
$(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$	$x = \frac{4\pi}{3}$	$-$	$-$	$+$(遞增)
$(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6})$	$x = \frac{5\pi}{3}$	$+$	$-$	$-$(遞減)
$(\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$	$x = \frac{23\pi}{12}$	$+$	$+$	$+$(遞增)

結論：

函數在以下區間遞增：$(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$

函數在以下區間遞減：$(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6})$

2 solution：

1. **函數：**

$$f(x) = \frac{9x-1}{x+5}, \qquad x \neq -5$$

2. **求一階導數：**

$$f'(x) = \frac{(9)(x+5)-(9x-1)\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{9x+45-9x+1}{(x+5)^2} = \frac{46}{(x+5)^2}$$

因為分母平方恆為正，且分子為常數 $46 > 0$，所以

$$f'(x) > 0 \quad \text{對所有} x \neq -5$$

3. **找臨界點：**

$$f'(x) = 0 \text{ 無解} \quad (\text{分子為常數}46)$$

$$f'(x)\text{在 } x = -5 \text{ 處無定義，但該點不在定義域內}$$

因此，**沒有任何可用於二階導數測試的臨界點**。

4. **(檢查) 二階導數：**

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[(x+5)^{-2}\right] \cdot 46 = -92(x+5)^{-3} = -\frac{92}{(x+5)^3}$$

雖然可求二階導數，但由於無臨界點，因此二階導數測試不適用。

結論：

因為$f'(x) > 0$ 在整個定義域上皆成立，故$f(x)$ 嚴格遞增。

$$\boxed{\text{此函數沒有相對極大值或極小值。}}$$

3 solution：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(x^6-1)^{1/3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x}{x^2}}{\dfrac{(x^6-1)^{1/3}}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x}}{(x^6-1)^{1/3}\cdot x^{-2}}$$

Note that $(x^6-1)^{1/3}=x^2\left(1-\dfrac{1}{x^6}\right)^{1/3}\Rightarrow\dfrac{(x^6-1)^{1/3}}{x^2}=\left(1-\dfrac{1}{x^6}\right)^{1/3}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x}}{\left(1-\dfrac{1}{x^6}\right)^{1/3}}=\frac{2}{\infty\cdot 1}=0.$$

$$\boxed{Ans:0}$$

p.s. 請同學考試的時候使用上課交的方法

4 solution：

$$y = 2(x-2) + \cot(x), \qquad 0 < x < \pi$$

1. **定義域與漸近線：**

$$\cot(x) \text{ 在} x = 0 \text{ 與} x = \pi \text{ 無定義}$$

$$\Rightarrow \text{ 垂直漸近線：} x = 0,\ x = \pi$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = +\infty, \qquad \lim_{x\to \pi^-} y = -\infty$$

2. **求一階導數與單調性：**

$$y' = 2 - \csc^2(x)$$

令 $y' = 0$：

$$2 - \csc^2(x) = 0 \Rightarrow \csc^2(x) = 2 \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

區間符號測試：

區間	y'符號	結論
$(0, \frac{\pi}{4})$	$-$	遞減
$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$	$+$	遞增
$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$	$-$	遞減

3. **相對極值：**

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - 2\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 3 \quad \Rightarrow \text{相對極小}$$

$$y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - 5 \quad \Rightarrow \text{相對極大}$$

4. **求二階導數與凹凸性：**

$$y'' = \frac{d}{dx}(-\csc^2(x)) = 2\ \csc^2(x)\cot(x)$$

區間	y''符號	凹凸性
$(0, \frac{\pi}{2})$	$+$	凹向上
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$-$	凹向下

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{拐點在} \left(\frac{\pi}{2},\ \pi - 4\right)$$

5. **截距：**

- **y 截距：**無（$x = 0$ 不在定義域）

- **x 截距：**解 $2(x-2)+\cot(x)=0$，數值解得

$$x \approx 0.28344 \quad \Rightarrow \quad (x,y) \approx (0.28344, 0)$$

6. **綜合結論：**

$$\text{遞減區間：} (0, \tfrac{\pi}{4}) \cup (\tfrac{3\pi}{4}, \pi)$$

$$\text{遞增區間：} (\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4})$$

$$\text{相對極小：} \left(\tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{\pi}{2}-3\right)$$

$$\text{相對極大：} \left(\tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{3\pi}{2}-5\right)$$

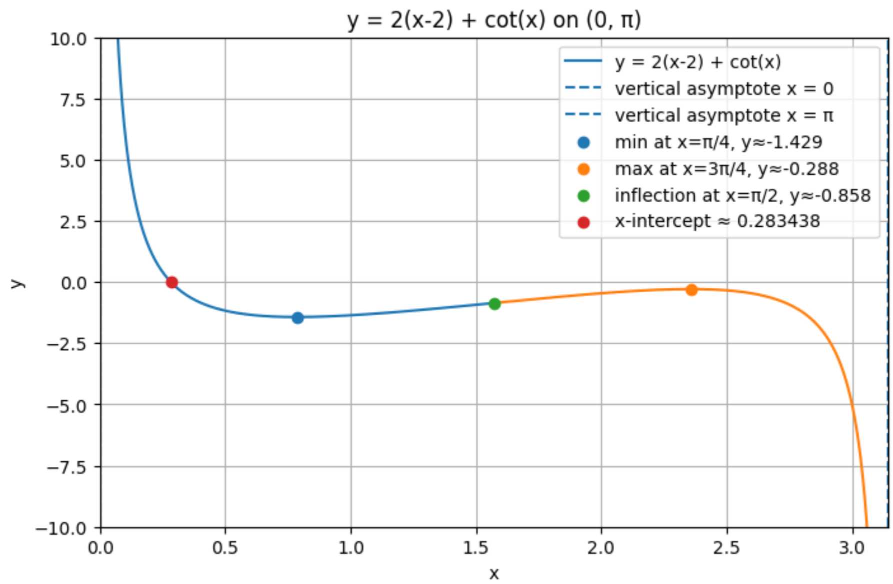
$$\text{反曲點：} \left(\tfrac{\pi}{2},\ \pi-4\right)$$

$$\text{垂直漸近線：} x=0,\ x=\pi$$

$$\text{x 截距：} x \approx 0.28344$$

7. **函數圖形：**

下圖為函數 $y=2(x-2)+\cot(x)$ 在區間 $(0,\pi)$ 上的圖形，已標示垂直漸近線、相對極大值、相對極小值與拐點：



圖表 1: Graph of $y=2(x-2)+\cot(x)$ on $(0,\pi)$

8. **評分標準:** 極值、反曲點 (1 分) 漸進線 (1 分) 截距 (1 分) 圖 (1 分)